ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ

ଜ୍ୟାମିତିରେ ସାଦୃଶ୍ୟ

(SIMILARITY IN GEOMETRY)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା :

ଅନେକ ସମୟରେ ଦୁଇଟି ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି, ''ସେ ଦୁଇଟି ଦେଖିବାକୁ ଏକାଭଳି'' ବୋଲି ଆମେ କହିଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ (i) କାନ୍ଥରେ ଟଙ୍ଗା ଯାଇଥିବା ଗୋଟିଏ ବୃହତ୍ ଆକାରର ଏବଂ ଗୋଟିଏ କ୍ଷୁଦ୍ର ଆକାରର ଓଡ଼ିଶାର ମାନଚିତ୍ର, (ii) 'ତାଜମହଲ୍' ଏବଂ ବଜାରରେ ମିଳୁଥିବା 'ତାଜମହଲ୍‌ର ଏକ ନମୁନା' । (iii) ଗୋଟିଏ ନେଗେଟିଭରୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ ଗୋଟିଏ ବଡ଼ ଫଟୋଚିତ୍ର ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଛୋଟ ଫଟୋଚିତ୍ର ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏପରି ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର କାହିଁକି ଏକା ଭଳି ଦେଖାଯାଏ କହି ପାରିବ କି ?

ଓଡ଼ିଶାର ଗୋଟିଏ ବଡ଼ ମାନଚିତ୍ର (ମାନଚିତ୍ର I) ଯେଉଁଥିରେ ରାଉରକେଲା, ପାରାଦ୍ୱୀପ ଓ ଗୋପାଳପୁର ତଥା ସମସ୍ତ ଜିଲ୍ଲାର ମୁଖ୍ୟ ସହର ଗୁଡ଼ିକ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବ ଏବଂ ପୂର୍ବମାନଚିତ୍ରର ଏକ ଛୋଟ ଆକାରର ମାନଚିତ୍ର (ମାନଚିତ୍ର II) ଯେଉଁଥିରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବ ସଂଗ୍ରହ କରିବା । ମାନଚିତ୍ର - I ଓ ମାନଚିତ୍ର - II ରୁ ରାଉରକେଲା-ପାରଦ୍ୱୀପ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତା ପୃଥକ୍ ଭାବେ ମାପି ଦୂରତା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ସେହିପରି ପାରାଦ୍ୱୀପ-ଗୋପାଳପୁର ଓ ଗୋପାଳପୁର - ରାଉରକେଲା ମଧ୍ୟରେ ଉଭୟ ମାନଚିତ୍ରରୁ ପାଇଥିବା ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, ମାନଚିତ୍ର -I ଓ ମାନଚିତ୍ର II ରୁ ପାଇଥିବା ତିନିଯୋଡ଼ା ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବେ ।

ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସ୍ଥାନ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ଉଭୟ ମାନଚିତ୍ରରୁ ମାପି ସେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା, ଆମେ ପାଇଥିବା ଭିନ୍ନ ଦୁଇଟି ସ୍ଥାନ ମଧ୍ୟରେ ମିଳିଥିବା ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବାଲୋଚିତ ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ ହେବ । ଏହି କାରଣରୁ ହିଁ ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର ଏକାଭଳି ଦେଖାଯାଇଥାଏ । ଆମେ କହୁ, ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିର **ଆକୃତି (Shape)** ଅଭିନ୍ନ ।

ଅଭିନ୍ନ ଆକୃତି ଥିବା ବସ୍ତୁ ଦୁଇଟି ବା ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିକୁ **ସଦୃଶ ବସ୍ତୁ ବା ସଦୃଶ ଚିତ୍ର (Similar Figures)** କୁହାଯାଏ । ସଦୃଶ ହେବାର ଗୁଣକୁ **ସାଦୃଶ୍ୟ (Similarity)** କୁହାଯାଏ ।

1.2 ଜ୍ୟାମିତିରେ ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ (Ratio and Proportion in Geometry) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ପଢ଼ିଛ : a, b, c, d ଚାରିଗୋଟି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ଆମେ ଲେଖୁ a : b = c : d

ଉକ୍ତ ସମାନୁପାତିକ ଧର୍ମକୁ ଏଠାରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ।

ତୁମେ ଜାଣିଛ : ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

ମନେକରାଯାଉ Δ_1 ରେ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b_1 ଏକକ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h_1 ଏକକ ।

$\therefore \Delta_1$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} b_1 h_1$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

ପୁନଶ୍ଚ Δ_2 ର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b_2 ଏକକ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h_2 ଏକକ ହେଲେ

$\therefore \Delta_2$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} b_2 h_2$ ବର୍ଗ ଏକକ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ Δ_1 ଓ Δ_2 ର ଉଚ୍ଚତା $h_1 = h_2$ ।

$$\therefore \frac{\Delta_1 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta_2 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h_1}{\frac{1}{2} b_2 h_2} = \frac{b_1 h_1}{b_2 h_1} = \frac{b_1}{b_2} \qquad .....(1)$$

ସେହିପରି ମନେକରାଯାଉ Δ_1 ଓ Δ_2 ର ଭୂମି ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ, ଅର୍ଥାତ୍ $b_1 = b_2$ ।

$$\therefore \frac{\Delta_1 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta_2 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h_1}{\frac{1}{2} b_2 h_2} = \frac{b_1 h_1}{b_1 h_2} = \frac{h_1}{h_2} \qquad ......(2)$$

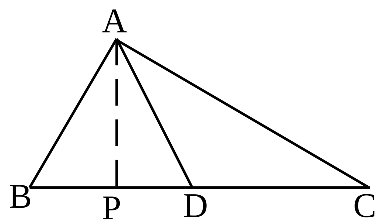
(1) ରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା -

ସମାନ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ଭୂମିଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(2) ରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା -

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ, ସହ ସମାନ ।

ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି :



(ଚିତ୍ର 1.1)

ଚିତ୍ର 1.1 ରେ, D ବିନ୍ଦୁ $\overline{BC}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ B - D - C ।

ଫଳରେ ΔABD ର ଭୂମି $\overline{BD}$, ΔADC ର ଭୂମି $\overline{DC}$

ଏବଂ ΔABC ର ଭୂମି $\overline{BC}$ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ।

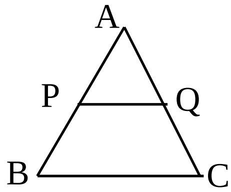
ପୁନଶ୍ଚ ΔABD, ΔADC ଓ ΔABC ପ୍ରତ୍ୟେକର ଶୀର୍ଷ A । ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

ଅତଏବ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା AP ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ ତିନୋଟିଯାକ ତ୍ରିଭୁଜ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।

ଫଳରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ, **ଦୁଇଟି (ବା ତହିଁରୁ ଅଧିକ) ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିମାନ ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ ରହିଲେ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକ ସମ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।**

ଜ୍ୟାମିତି କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ କେତେକ ସ୍ଥଳରେ ବିଭିନ୍ନ ମାପ ସମାନୁପାତୀ ହୋଇଥିବାର ଆମେ ଦେଖୁ । ଏହିପରି କେତେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିସ୍ଥିତିର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ କରାଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 1.2 ରେ ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.2)

P ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ କୁ AP : PB ଅନୁପାତରେ ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁ $\overline{AC}$ କୁ AQ : QC ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରନ୍ତି । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟ (1) ରୁ ଜାଣିବା ଯେ, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁକୁ ଛେଦ କଲେ, ଉକ୍ତ ବାହୁଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

ଭାଷାଗତ ସୁବିଧା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଆମେ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ କହିବା :- ''$\overline{PQ}$ ଦ୍ୱାରା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ସମାନୁପାତରେ ବିଭାଜିତ ହୁଅନ୍ତି'' ଅଥବା, ''$\overline{PQ}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ ସମାନୁପାତରେ ଛେଦ କରେ'' ($\overline{PQ}$ divides $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ proportionally) ।

ଆସ, ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟର ଯୁକ୍ତି ଭିତ୍ତିକ ପ୍ରମାଣ (Logical Proof) କରିବା ।

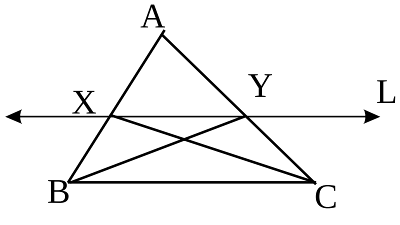
ଉପପାଦ୍ୟ - 1 (ଥେଲିସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ସରଳରେଖା ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁ ସମାନୁପାତରେ ବିଭାଜିତ ହୁଅନ୍ତି ।

(If a line drawn parallal to a side of a triangle intersects the other two sides at two distinct points, then the line divides the other two sides proportionally.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ସରଳରେଖା L, ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ X ଓ Y ରେ ଛେଦ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ସମାନୁପାତରେ ଛେଦ କରେ; ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$



(ଚିତ୍ର 1.3)

ଅଙ୍କନ : $\overline{BY}$ ଓ $\overline{CX}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔAXY ଓ ΔBXY ର ଭୂମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{BX}$ ଏବଂ ଉଭୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Y) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।

$\therefore \dfrac{\Delta\ AXY\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXY\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AX}{BX}$ ......(1)

ପୁନଶ୍ଚ ΔAYX ଓ ΔCYX ର ଭୂମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AY}$ ଓ $\overline{CY}$ ଏବଂ ଉଭୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AC}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (X) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ । ଏଣୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।

$\therefore \dfrac{\Delta\ AYX\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYX\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AY}{CY}$ ....(2)

ମାତ୍ର ΔBXY ଓ ΔCYX ଉଭୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{XY}$ ଉପରେ ଏବଂ $\overline{XY}$ ସହ ଏକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{XY}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ, ΔBXY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔCYX ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ..... (3)

(2) ଓ (3) $\Rightarrow \dfrac{\Delta\ AYX\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXY\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AY}{CY}$ ....(4)

(1) ଓ (4) $\Rightarrow \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଚିତ୍ର - 1.3 ରେ (i) $\dfrac{BX}{AB} = \dfrac{CY}{AC}$ (ii) $\dfrac{AX}{AB} = \dfrac{AY}{AC}$

ପ୍ରମାଣ : ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଦ୍ୱାରା, $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY} \Rightarrow \dfrac{AX}{BX} + 1 = \dfrac{AY}{CY} + 1$

$\Rightarrow \dfrac{AX+BX}{BX} = \dfrac{AY+CY}{CY} \Rightarrow \dfrac{AB}{BX} = \dfrac{AC}{CY}$ ବା, $\dfrac{BX}{AB} = \dfrac{CY}{AC}$ [(i) ପ୍ରମାଣିତ]

ପୁନଶ୍ଚ, ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଦ୍ୱାରା, $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY} \Rightarrow \dfrac{BX}{AX} = \dfrac{CY}{AY}$ (ବ୍ୟସ୍ତ ଅନୁପାତ ନେଲେ)

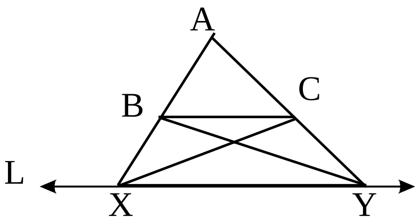
$\Rightarrow \dfrac{BX}{AX} + 1 = \dfrac{CY}{AY} + 1 \Rightarrow \dfrac{BX+AX}{AX} = \dfrac{CY+AY}{AY}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$ ବା, $\dfrac{AX}{AB} = \dfrac{AY}{AC}$ [(ii) ପ୍ରମାଣିତ]

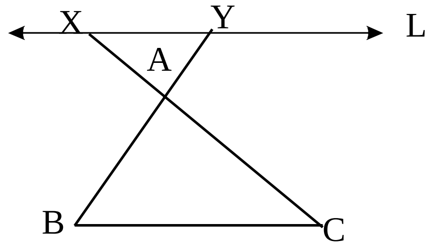
ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) ଉପପାଦ୍ୟ - 1 କୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ "ମୌଳିକ ସମାନୁପାତିତା ଉପପାଦ୍ୟ" (Basic Proportionality theorem) କୁହାଯାଏ । ଗ୍ରୀକ୍ ଦାର୍ଶନିକ ଓ ଗଣିତଜ୍ଞ ଥେଲିସ୍‌ଙ୍କ ନାମାନୁସାରେ ଏହାକୁ ଥେଲିସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର କଥନରେ ଆମେ L ରେଖା ନିମନ୍ତେ ଗୋଟିଏ ସର୍ତ୍ତ ଆରୋପ କରିଛୁ । ସର୍ତ୍ତଟି ହେଲା, 'L ରେଖା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

ଏହି ସର୍ତ୍ତବିନା, L ରେଖା ଲାଗି ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ସମ୍ଭବ । ଚିତ୍ର - 1.4 ଓ ଚିତ୍ର - 1.5 ରେ ଏହି ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ପରିସ୍ଥିତି (i)
(ଚିତ୍ର 1.4)



ପରିସ୍ଥିତି (ii)
(ଚିତ୍ର 1.5)

ଚିତ୍ର - 1.4 ରେ L ରେଖା ଓ $\overline{BC}$ ସମାନ୍ତର ଏବଂ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$, L ରେଖାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । [ଏଠାରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ L ରେଖା ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ ବୋଲି କୁହଯାଏ ଏବଂ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{BX}$ କୁ $\overline{AB}$ ର ବହିର୍ବିଭାଜିତ ଅଂଶ ରୂପେ ନିଆଯାଏ ।]

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣଟି ନିମ୍ନମତେ କରଯାଇଥାଏ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{BY}$ ଓ $\overline{CX}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : $\frac{\Delta\ AXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AX}{BX}$ ....(1)

[ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଭୂମି ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ (C) ଅଭିନ୍ନ ହେତୁ]

ପୁନଶ୍ଚ, $\frac{\Delta\ AYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AY}{CY}$ ....(2) [ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ କାରଣ ସହ ଅନୁରୂପ କାରଣ ହେତୁ]

ମାତ୍ର ΔBXC ଓ ΔCYB ଉଭୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଓ ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ରେଖା $\overline{BC}$ ଓ L ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ ΔBXC କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ CYB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - - - - - (3)

$\Rightarrow \Delta$ BXC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔCYB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

[ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ΔABC ର କ୍ଷେ.ଫ. ଯୋଗକଲେ]

$\Rightarrow \Delta$AXC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔAYB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - - - - - (4)

(3) ଓ (4) ରୁ ଆମେ ପାଇବା $\frac{\Delta\ AXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\Delta\ AYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}$

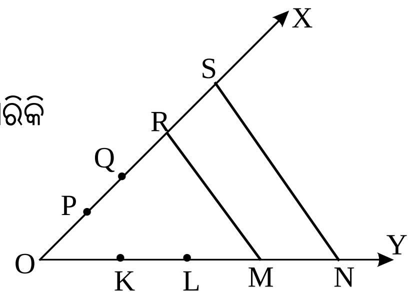
$\Rightarrow \frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ [(1) ଓ (2) ଅନୁଯାୟୀ] [ପ୍ରମାଣିତ]

ପରିସ୍ଥିତି (ii), ଅର୍ଥାତ୍ ଚିତ୍ର 1.5 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ପରିସ୍ଥିତିରେ ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ଉପାପାଦ୍ୟ - 1 ର ବିପରୀତ ଉପପାଦ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା :

ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର ବିପରୀତ କଥନ ନିମ୍ନମତେ ହେବ ।

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁକୁ ସମାନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ରେଖା, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 1.6)

ଚିତ୍ର - 1.6 ରେ $\angle XOY$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ।

$\overrightarrow{OX}$ ଉପରେ P, Q, R ଓ S ବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଏପରି ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି $OP = PQ = QR = RS$

ସେହିପରି $\overrightarrow{OY}$ ଉପରେ K, L, M ଓ N ବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଏପରି ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି $OK = KL = LM = MN$.

$\overline{RM}$ ଓ $\overline{SN}$ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।

$\therefore \frac{OR}{RS} = \frac{3}{1}$ . ...(1), ଏବଂ $\frac{OM}{MN} = \frac{3}{1}$ ....(2)

(1) ଓ (2) ରୁ ପାଇବା $\frac{OR}{RS} = \frac{OM}{MN}$

ଅର୍ଥାତ୍, ΔSON ରେ $\overleftrightarrow{RM}$ ରେଖା, $\overline{OS}$ ଓ $\overline{ON}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ସମାନୁପାତରେ ଛେଦକରେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଏକ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପକରି ଦେଖି ପାରିବା ଯେ $m\angle ORM = m\angle OSN$ ଫଳରେ $\overline{RM} \parallel \overline{SN}$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି କଥନର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ଉପାପାଦ୍ୟ - 2

(ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର ବିପରୀତ)

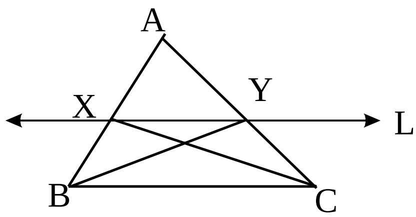
ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁକୁ ସମାନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ରେଖା, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ।

(If a line divides two sides of a triangle internally in the same ratio, then it is parallel to the third side of the triangle.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ L ରେଖା ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁରେ ସମାନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BY}$ ଓ $\overline{CX}$ ଅଙ୍କନ କରଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.7)

ପ୍ରମାଣ : ΔAXY ଏବଂ ΔBXY ର ଭୂମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{BX}$ ଏବଂ ଭୂମି ଦ୍ୱୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ (Y) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ।

$$\therefore \frac{\Delta\ AXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AX}{BX} \qquad \text{........(1)}$$

ସେହିପରି ΔAYX ଏବଂ ΔCYX ର ଭୂମି $\overline{AY}$ ଓ $\overline{CY}$ ଏବଂ ଭୂମିଦ୍ୱୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AC}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ X ବିଶିଷ୍ଟ ହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ।

$$\therefore \frac{\Delta\ AYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AY}{CY} \qquad \text{........(2)}$$

ମାତ୍ର $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ (ଦତ୍ତ) ....(3)

ଉକ୍ତି (1), (2) ଓ (3) $\Rightarrow \frac{\Delta\ AXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\Delta\ AYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}$

$\Rightarrow \Delta BXY$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔCYX ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ଏଠାରେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{XY}$ ଉପରିସ୍ଥ (ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ବାହୁକୁ ଏହାର ଭୂମି ବୋଲି ଧରାଯାଇପାରେ) ।

$\therefore$ ΔBXY ଓ ΔCYX ଉଭୟର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ

$\Rightarrow \overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{BC} \Rightarrow$ L ରେଖା, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର । (ପ୍ରମାଣିତ)

(ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ମଧ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ)

ଅର୍ଥାତ୍, B ଓ C ଠାରୁ $\overleftrightarrow{XY}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ-ଦୂରତା ସମାନ ।

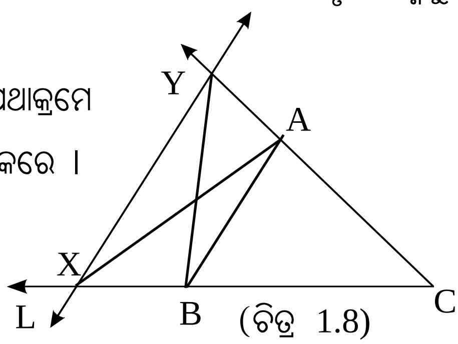
ମନ୍ତବ୍ୟ (1) : କୌଣସି ରେଖା ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବାହୁକୁ ସମାନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କଲେ, ଉକ୍ତ ରେଖା ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ।

ଟୀକା : ଏକ ରେଖା କୌଣସି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରିବା ଅର୍ଥ ଉକ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ- ସମ୍ପୃକ୍ତ ରଶ୍ମିକୁ ଛେଦ କରିବା ।

ଚିତ୍ର - 1.8 ରେ L ରେଖା, ΔABC ର $\overline{CA}$ ଓ $\overline{CB}$ ବାହୁକୁ ଯଥାକ୍ରମେ Y ଓ X ବିନ୍ଦୁରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overrightarrow{CA}$ ଓ $\overrightarrow{CB}$ କୁ ଛେଦ କରେ ।

ଦତ୍ତ ଅଛି : $\frac{CY}{AY} = \frac{CX}{BX}$ ।

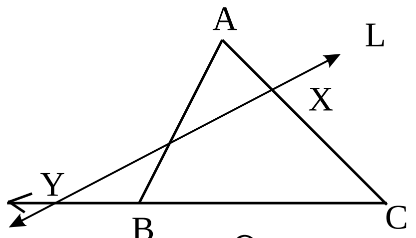
ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ : L ସମାନ୍ତର $\overline{AB}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.8)

$\overline{AX}$ ଏବଂ $\overline{BY}$ ଅଙ୍କନ କରି, ଉପପାଦ୍ୟ - 2 ର ପ୍ରମାଣ ଅବଲମ୍ବନରେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ L ରେଖା ଓ $\overline{AB}$ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

(2) : ଯଦି L ରେଖା $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଏବଂ $\overline{CB}$ ବାହୁକୁ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ ଏବଂ ଅନୁପାତ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AX}{CX} = \frac{BY}{CY}$ ହୁଏ, ତେବେ L ରେଖା, ΔABC ର ତୃତୀୟ ବାହୁ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ କି ?

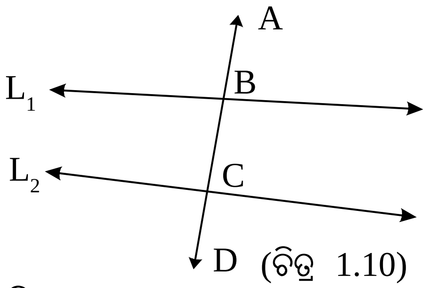


(ଚିତ୍ର 1.9)

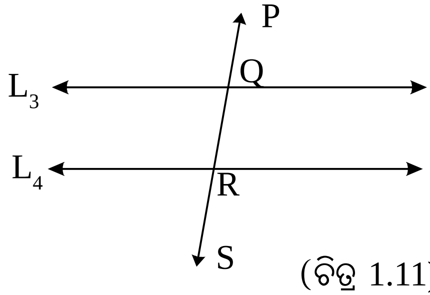
ଚିତ୍ର 1.9 ରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overleftrightarrow{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ X ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ । ଫଳରେ $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{AB}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ନାହିଁ ।

1.3 ଛେଦକ ରେଖା ଓ ଛେଦିତାଂଶ (Transversal and Intercept) :



(ଚିତ୍ର 1.10)



(ଚିତ୍ର 1.11)

ଚିତ୍ର 1.10 ରେ, L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟର $\overleftrightarrow{AD}$ ଏକ **ଛେଦକ (transversal)**. L_1 ଓ L_2 ରେଖାକୁ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AD}$ ଯଥାକ୍ରମେ B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{BC}$ କୁ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AD}$ ଉପରିସ୍ଥ **ଛେଦିତାଂଶ** (intercept) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର -1.11 ରେ, $L_3 \parallel L_4$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{PS}$ ଏକ ଛେଦକ । ଏଠାରେ $\overline{QR}$ ହେଉଛି ଛେଦକ $\overleftrightarrow{PS}$ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶ (intercept) ।

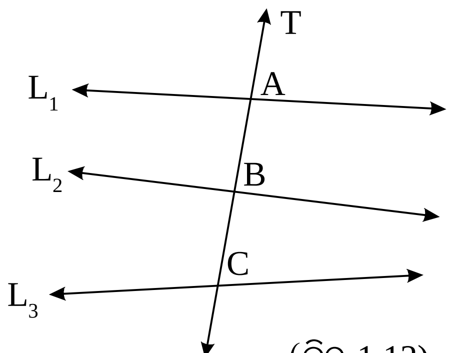
1.3.1 ତିନୋଟି ରେଖାର ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶ

ଚିତ୍ର -1.12 ରେ, ଛେଦକ ରେଖା T ଉପରେ

(i) L_1 ଓ L_2 ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AB}$;

(ii) L_1 ଓ L_3 ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AC}$;

ଏବଂ (iii) L_2 ଓ L_3 ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶ $\overline{BC}$ ।



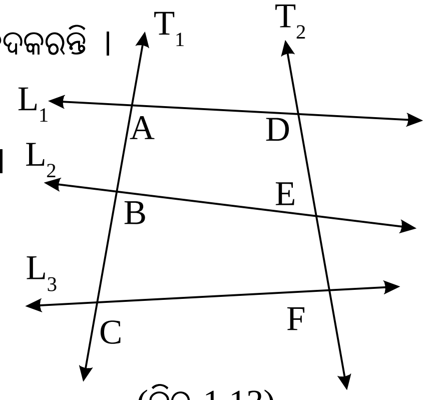
(ଚିତ୍ର 1.12)

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଛେଦକର ଗୋଟିଏ ଛେଦାଂଶ ବା ଛେଦିତାଂଶ କୁହାଯାଏ ।

1.3.2 ତିନୋଟି ରେଖାର ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ :

ଚିତ୍ର-1.13ରେ, L_1, L_2 , L_3 ରେଖା ତିନୋଟିକୁ T_1 ଓ T_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ଛେଦକରନ୍ତି । L_1, L_2,L_3କୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ସେହି ରେଖା ତିନୋଟିକୁ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D,E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଚିତ୍ର - 1.13 ରେ

T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DE}$ ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ । ସେହିପରି $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ଏବଂ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DF}$ ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ।

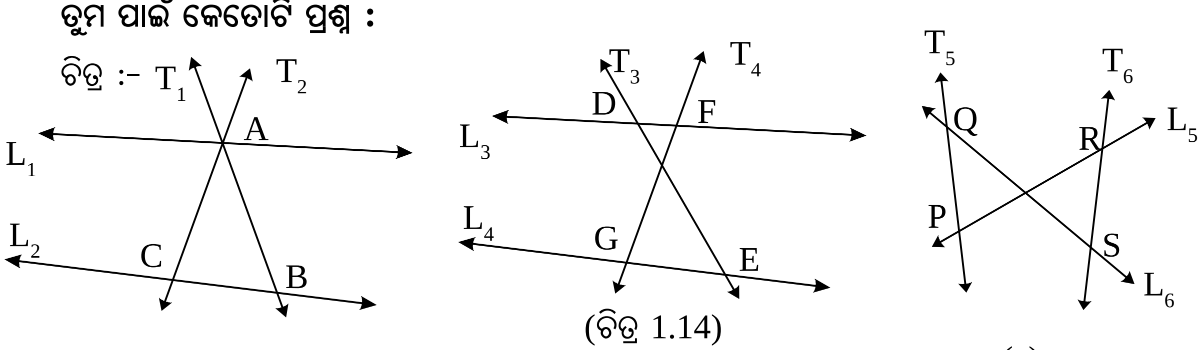


(ଚିତ୍ର 1.13)

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଛେଦିତାଂଶ ଦ୍ୱୟକୁ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ (Corresponding intercepts) କୁହାଯାଏ ।

ତୁମ ପାଇଁ କେତୋଟି ପ୍ରଶ୍ନ :

ଚିତ୍ର :-



(ଚିତ୍ର 1.14)

(a) (b) (c)

ପ୍ରଶ୍ନ -1 : ଚିତ୍ର 1.14(a) ରେ L_1 ଓ L_2 ରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।

ଏକ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଦୁଇଟିର ନାମ କୁହ ।

ପ୍ରଶ୍ନ - 2 : ଚିତ୍ର -1.14(b) ରେ L_3 ଓ L_4 ରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ ଛେଦକ T_3 ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_4 ଯଥାକ୍ରମେ F ଓ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଏକ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଦୁଇଟିର ନାମ କୁହ ।

ପ୍ରଶ୍ନ - 3 : ଚିତ୍ର - 1.14(c) ରେ L_5 ଓ L_6 ରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଛେଦକ T_5 ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_6 ଯଥାକ୍ରମେ R ଓ S ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଦୁଇଟିର ନାମ କୁହ ।

1.3.3 ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

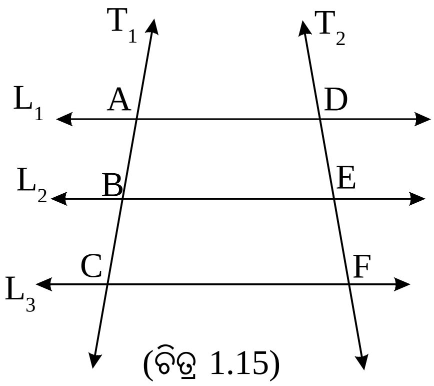
ଆସ ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଓ ସେମାନଙ୍କୁ ଛେଦକରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ଚିତ୍ର - 1.15 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାମାନଙ୍କୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଛେଦକ L_1 , L_2 ଓ L_3 କୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D, E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

L_1 ଓ L_2 କୁ T_1 ଓ T_2 ଛେଦ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ହେଲେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DE}$

L_2 ଓ L_3 କୁ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ହେଲେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ।

L_1 ଓ L_3 କୁ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ହେଲେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DF}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.15)

ଏହିଭଳି ଏକ ଚିତ୍ର କରି (ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ ସାହାଯ୍ୟରେ)

ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DF}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପିଲେ, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ହେବ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ରେଖା ଛେଦ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଛେଦକ ରେଖା ଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସମାନ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ (i) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ଏବଂ

(iii) $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$

ସମାନୁପାତର ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅନୁଯାୟୀ, ଉକ୍ତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତର ଯୁକ୍ତିଭିତ୍ତିକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ପ୍ରମେୟ - 1.1 :

ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଛେଦକରିବା ଦ୍ୱାରା, ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହୁଅନ୍ତି ।

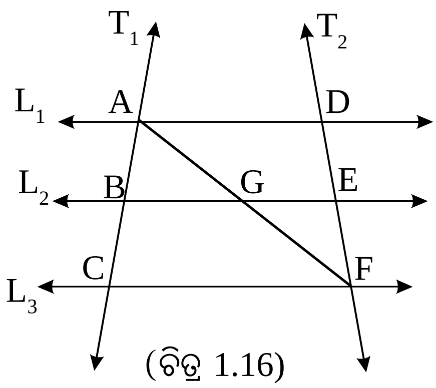
(If two transversals intersect three mutually parallel straight lines, then the lengths of the corresponding intercepts formed on the transversals are proportional.)

ଦତ୍ତ : ସରଳରେଖା $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; ଛେଦକ ରେଖା T_1 ଓ T_2,

L_1, L_2 ଓ L_3 ତ୍ରୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B, C ଓ D, E, F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.16)

ପ୍ରମାଣ : $\overline{AF}$, L_2 କୁ ଛେଦ କରିବ

(A ଓ F ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ L_2 ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବାରୁ)

$\overline{AF}$ ଓ L_2 ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ G ଦିଆଯାଉ ।

ΔACF ରେ $L_2 \parallel \overline{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GF}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁଯାୟୀ) .... (1)

ପୁନଶ୍ଚ, ΔAFD ରେ, $L_2 \parallel \overline{AD}$ $\Rightarrow \dfrac{AG}{GF} = \dfrac{DE}{EF}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁଯାୟୀ) .... (2)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ ....(3) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)........ (4)

ପୁନଶ୍ଚ (3) $\Rightarrow \dfrac{AB+BC}{BC} = \dfrac{DE+EF}{EF}$ (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DF}{EF} \Rightarrow \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ ....(ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) .... (5)

(4) ଓ (5) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -(i) : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{DF}$ (ii) $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$

ପ୍ରମାଣ : $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ପ୍ରମେୟ 1.1 ରେ ପ୍ରମାଣିତ) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$ (i) ପ୍ରମାଣିତ

ପୁନଶ୍ଚ, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ (ପ୍ରମେୟ 1.1 ରେ ପ୍ରମାଣିତ) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$ (ii) ପ୍ରମାଣିତ

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (iii) : ତିନୋଟି (ବା ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ) ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶମାନେ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାମାନଙ୍କର ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ ।

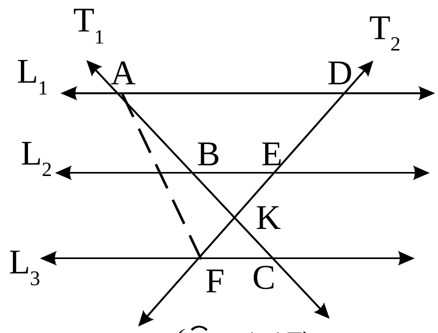
ପ୍ରମାଣ : $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ । (ଚିତ୍ର 1.16 ଦେଖ)

$\therefore$ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ .... (1)

ମାତ୍ର T_1 ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶ ଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ । ଅର୍ଥାତ୍, AB = BC (ଦତ୍ତ) ..... (2)

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{EF}$ ..... [(2) ଅନୁଯାୟୀ]

$\Rightarrow DE = EF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

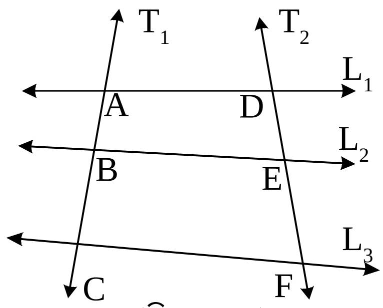


(ଚିତ୍ର 1.17)

ମନ୍ତବ୍ୟ - (1) : ପ୍ରମେୟଟିକୁ ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ନିଆଯାଇ ଥିବା ଚିତ୍ରରେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରି ନ ଥିଲାବେଳେ, ଚିତ୍ର 1.17 ରେ ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ ମଧ୍ୟ $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏବଂ Δ AFC ଓ Δ AFD ରେ ଉପପାଦ୍ୟ-1 ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ପୂର୍ବ ପରି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ।

(2) ତିନୋଟିରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତରରେଖା କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରମେୟଟି ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ।

ପ୍ରମେୟ -1.1 ର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍, ତିନୋଟି ରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ରେଖା ଛେଦ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶମାନ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ଛେଦିତ ରେଖା ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ହୋଇପାରନ୍ତି ବା ନ ହୋଇପାରନ୍ତି ମଧ୍ୟ ।



(ଚିତ୍ର 1.18)

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରୁ ତାହା ସ୍ପଷ୍ଟ ।

ଚିତ୍ର - 1.18 ରେ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ଦ୍ୱୟ ଦୁଇ ଅସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ D, E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ମନେକରାଯାଉ AB = x ଏକକ ଓ DE = y ଏକକ,

ବର୍ତ୍ତମାନ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ F ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଟି ନିଆଯାଉ ଯେପରି BC = 2x ଏକକ ଏବଂ EF = 2y ଏକକ ହେବ । C, F କୁ ଯୋଗକରି L_3 ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{x}{y} \text{ ....(1)}, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} \text{ ....(2)} \quad \frac{AC}{DF} = \frac{AB+BC}{DE+EF} = \frac{3x}{3y} = \frac{x}{y} \text{ ....(3)}$$

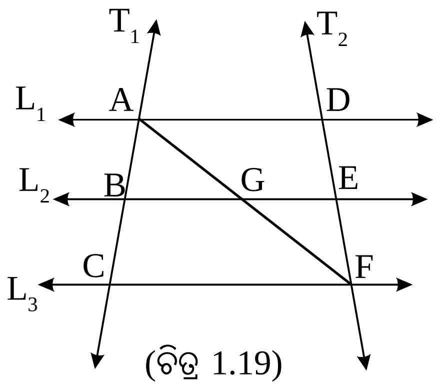
$$(1), (2) \text{ ଓ } (3) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

ଏଠାରେ ଛେଦକ ରେଖା ଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ଅଟନ୍ତି । କିନ୍ତୁ L_1, L_2 ଓ L_3 ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ନୁହନ୍ତି ।

ତେଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ, **'ଛେଦିତାଂଶଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଛେଦିତାଂଶ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ସମାନ୍ତର ନ ହୋଇ ପାରନ୍ତି ।'**

ଉଦାହରଣ - 1 : ଚିତ୍ର - 1.19 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, L_1, L_2 ଓ L_3 ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 1.19)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରଯାଉ ଏବଂ $\overline{AF}$ ଓ L_2 ପରସ୍ପରକୁ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔAFD ରେ, $\overline{EG} \parallel \overline{DA}$ $[\because L_1 \parallel L_2]$

$\therefore \frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF}$ କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

$\therefore \frac{AG}{GF} = \frac{AB}{BC}$; ଅର୍ଥାତ୍ ΔACF ର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{AF}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ L_2 ସମାନୁପାତରେ ଛେଦକରେ ।

$\Rightarrow L_2 \parallel L_3$ ମାତ୍ର $L_1 \parallel L_2$ (ଦତ୍ତ)

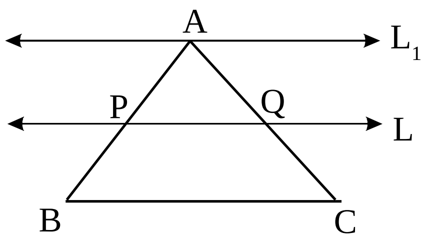
$\Rightarrow L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\overline{AB}$ ବାହୁର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ L ରେଖା ଅଙ୍କିତ ଏବଂ L, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର । L ଓ $\overline{AC}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ Q ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା $\overline{AC}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । ଅର୍ଥାତ୍ AQ = QC ।

ଅଙ୍କନ : A ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଓ L ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର କରି L_1 ରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.20)

ପ୍ରମାଣ : $L \parallel \overline{BC}$ (ଦତ୍ତ) ....(1)

ଏବଂ $L_1 \parallel L$ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ....(2)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow L_1 \parallel \overline{BC}$, ଅର୍ଥାତ୍, $L_1 \parallel L \parallel \overline{BC}$

$\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{AC}$ ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ତ୍ରୟର ଛେଦକ

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{AP} = \frac{AQ}{QC}$ $[\because AP = PB$ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ$]$

$\Rightarrow 1 = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow QC = AQ$

ଅର୍ଥାତ୍, L ରେଖା $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । (ପ୍ରମାଣିତ)

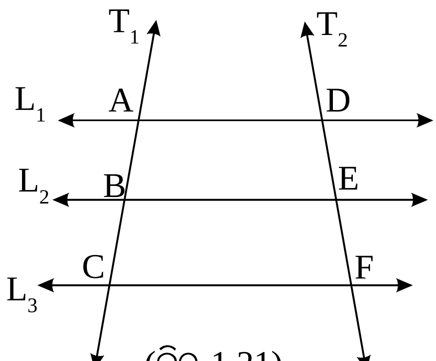
ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

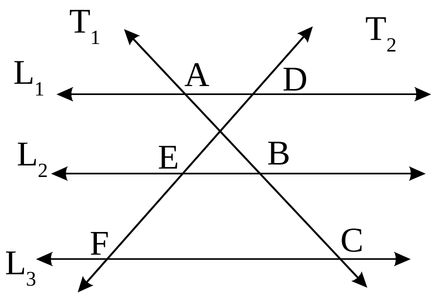
(a) ଚିତ୍ର -1.21 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ।

(i) AB = 2 ସେ.ମି., BC = 3 ସେ.ମି. ଓ DE = 3 ସେ.ମି. ହେଲେ EF = ... ।

(ii) DE = 6 ସେ.ମି., EF = 8 ସେ.ମି. ଓ BC = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ, AC = ... ।



(ଚିତ୍ର 1.21)



(ଚିତ୍ର 1.22)

(b) ଚିତ୍ର - 1.22 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ।

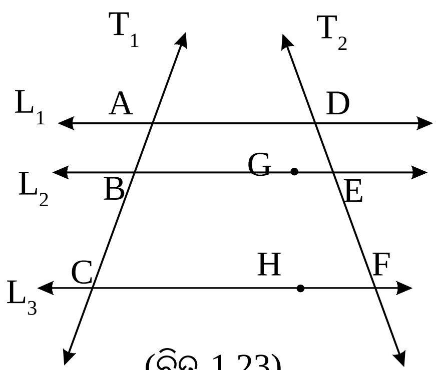
(i) AB = 1.5 x BC ହେଲେ, $\frac{EF}{FD}$ = ...

(ii) $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ B ହେଲେ, EF ର ... ଗୁଣ ହେଉଛି FD

2. ଚିତ୍ର -1.23 ରେ, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ । L_2 ଓ L_3 ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ G ଓ H ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନିତ ଯେପରି BG = AD ଏବଂ CH = BE;

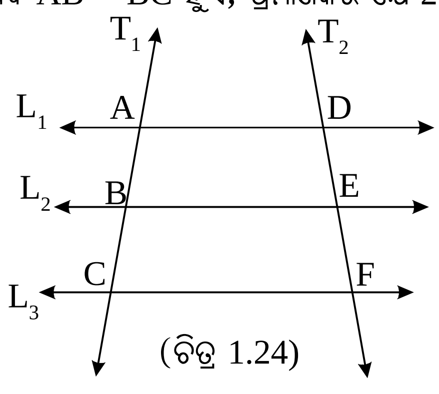
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) DG : EH = DE : EF

(ii) (DG + EH) : EH = DF : EF

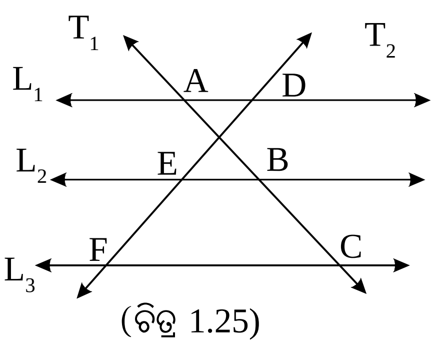


(ଚିତ୍ର 1.23)

3. ଚିତ୍ର - 1.24 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଯଦି AB = BC ହୁଏ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ 2 BE = AD + CF



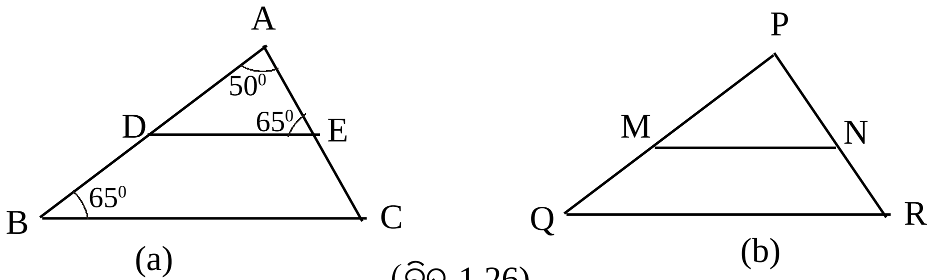
(ଚିତ୍ର 1.24)



(ଚିତ୍ର 1.25)

4. ଚିତ୍ର 1.25 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ । ଯଥାକ୍ରମେ L_1, L_2 ଓ L_3 କୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ L_1, L_2 ଓ L_3 କୁ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D, E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । DE= EF ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, CF – AD = 2 EB ।(ସୂଚନା : $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କର)

5.



(ଚିତ୍ର 1.26)

(i) ଚିତ୍ର - 1.26(a) ରେ A-D-B ଏବଂ A-E-C । $m\angle DAE = 50^0$, $m\angle AED = m\angle ABC = 65^0$। AD= 3 ସେ.ମି. AE:EC = 2:1 ହେଲେ, $\overline{DB}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଚିତ୍ର -1.26(b) ରେ $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$, $NR = \frac{2}{5}PR$ ଏବଂ PQ = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, PM ଓ QM ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଚିତ୍ର -1.26(b) ରେ $PM = \frac{2}{3}PQ$, NR = 1.2 ସେ.ମି. ଓ $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$ ହେଲେ, PR ସ୍ଥିର କର ।

6. (i) ΔABC ରେ, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ।

(ii) ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା, ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ, ଉକ୍ତ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକରେ, ପ୍ରମାଣ କର ।

7. ΔPQR ରେ, $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{QR}$ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N । $\overline{PR}$ ଉପରିସ୍ଥ S ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\overline{MN}$, $\overline{QS}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

8. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ । କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) AP : PC = BP : PD (ii) CP : AC = DP : BD

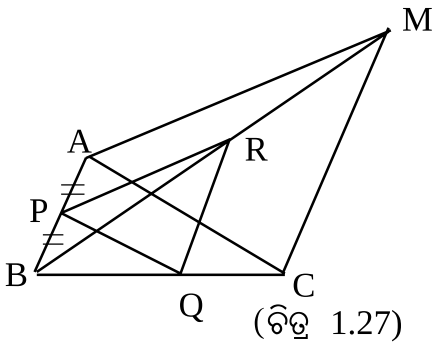
9. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P । $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{BC}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ହେଉଛି $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

10. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q, R ଓ S ।

(a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PQRS ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(b) ଉପରୋକ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, PQRS ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ।

11. ଚିତ୍ର - 1.27 ରେ, ΔABC ର $\overline{BA}$ ବାହୁ ସହ $\overline{CM}$ ସମାନ୍ତର, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ P ।
$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, $\overline{QR} \parallel \overline{CM}$;
ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $\overline{PR} \parallel \overline{AM}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.27)

1.4. ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା :

ଉପପାଦ୍ୟ - 3

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ସେହି କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ଭାଗକରେ, ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ, ଅନୁରୂପ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(The bisector of an angle of a triangle divides the side opposite to the angle into two segments whose lengths are proportional to the lengths of the corresponding adjacent sides.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ, $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$, $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

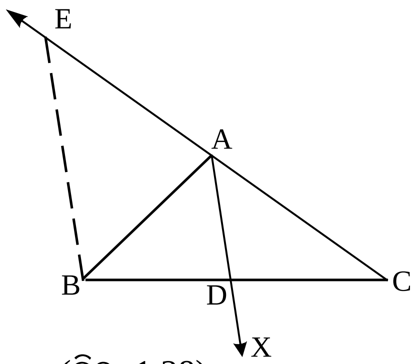
ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{CA}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ E ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଉ,
ଯେପରିକି C - A- E ଏବଂ $\overline{BE} \parallel \overline{DA}$ ।

ପ୍ରମାଣ : $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$ ଏବଂ $\overline{EC}$ ଏକ ଛେଦକ ।

$\therefore$ ଅନୁରୂପ ହେତୁ $\angle BEA \cong \angle DAC$ ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ, $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଏକ ଛେଦକ ।



(ଚିତ୍ର 1.28)

$\therefore$ ଏକାନ୍ତର $\angle ABE \cong \angle BAD$ ....(2)

ମାତ୍ର $\angle BAD \cong \angle DAC$ ....(3) ($\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ହେତୁ)

(2) ଓ (3) $\Rightarrow \angle ABE \cong \angle DAC$ ......(4)

(1) ଓ (4) $\Rightarrow \angle BEA \cong \angle ABE$

$\therefore \Delta ABE$ ରେ $AE = AB$ ......(5) (ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ହେତୁ)

ΔEBC ରେ $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ)

$\therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{EA}{AC}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁଯାୟୀ)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ [(5) ଅନୁଯାୟୀ] (ପ୍ରମାଣିତ)

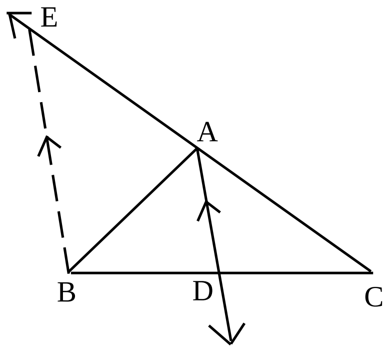
ପ୍ରମେୟ - 1.2 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 3 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ କୋଣର ଶୀର୍ଷରୁ ଅଙ୍କିତ ରଶ୍ମି ଉକ୍ତ କୋଣର ବିପରୀତ ବାହୁକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଅଂଶରେ ଭାଗ କରେ, ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନୁରୂପ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ରଶ୍ମିଟି ସମ୍ପୃକ୍ତ କୋଣକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(If a ray drawn from the vertex of an angle of a triangle divides the side opposite to the angle into two segments such that their lengths are proportional to the lengths of the corresponding adjacent sides, then the ray bisects the angle concerned.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\angle BAC$ ର ଶୀର୍ଷ A ରୁ ଅଙ୍କିତ $\overrightarrow{AD}$, $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ

D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଯେପରିକି, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$



(ଚିତ୍ର 1.29)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overrightarrow{AD}$, $\angle BAC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{CA}$ ଉପରେ E ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ,

ଯେପରିକି C-A-E ଏବଂ AE = AB । $\overline{BE}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}$ ($\because$ AB = AE : ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ ΔEBC ରେ $\overrightarrow{AD} \parallel \overline{EB}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 2 ଦ୍ୱାରା)

ଏକାନ୍ତର $\angle EBA \cong \angle BAD$ ...... (1) ($\overrightarrow{AD} \parallel \overline{EB}$ ଓ $\overline{AB}$ ଛେଦକ)

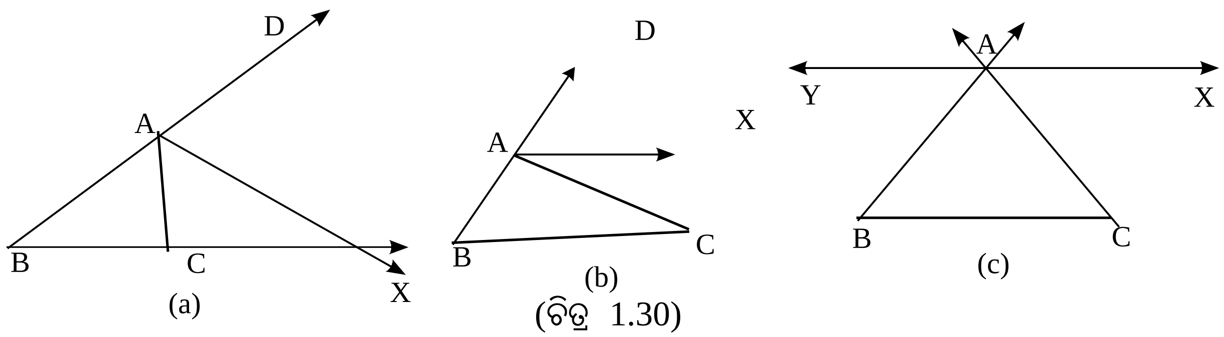
ଏବଂ $\angle BEA \cong \angle DAC$ .... (2) ($\overrightarrow{AD} \parallel \overline{EB}$ ଓ $\overline{EC}$ ଛେଦକ)

ମାତ୍ର $\angle EBA \cong \angle BEA$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ (1) ଓ (2)$\Rightarrow \angle BAD \cong \angle DAC$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overrightarrow{AD}$, $\angle BAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (ପ୍ରମାଣିତ)

1.4.1 ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ :

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।



(ଚିତ୍ର 1.30)

ଚିତ୍ର - 1.30(a) ରେ ΔABC ରେ $\angle CAD$, A ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ $\overrightarrow{AX}$ ଉକ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । $\overrightarrow{AX}$ କୁ $\angle BAC$ ର ଏକ **ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ** କୁହାଯାଏ ।

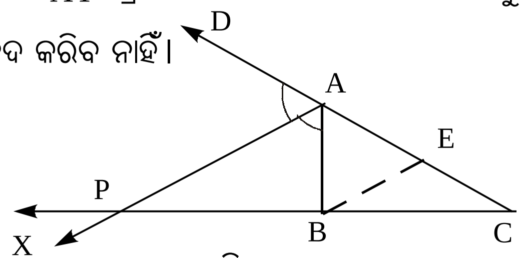
ସେହିପରି, ଚିତ୍ର 1.30(b) ରେ $\angle BAC$ ର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ଏବଂ ଚିତ୍ର 1.30(c) ରେ A ଶୀର୍ଷ ଠାରେ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଦର୍ଶାଯାଇ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଏଣୁ ଏଠାରେ $\angle BAC$ ର ଦୁଇଟି ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଉଛି $\overrightarrow{AX}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AY}$ ।

ସେହି ଚିତ୍ର ତିନୋଟିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଦେଖିବା :

(i) ଚିତ୍ର 1.30(a) ରେ ଥିବା ΔABC ର $AB > AC$ । $\overline{AC}$ ବାହୁ ସହ ସଂଲଗ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ $\angle CAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BC}$ ରଶ୍ମିକୁ ଛେଦ କରୁଛି ।

(ii) ଚିତ୍ର 1.30(b) ରେ ଥିବା ΔABC ର $AC > AB$, $\overline{AC}$ ସଂଲଗ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ $\angle CAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$, $\overline{BC}$ ବା $\overrightarrow{BC}$ କୌଣସିଟିକୁ ଛେଦ କରିବ ବୋଲି ଜଣାପଡୁ ନାହିଁ ।

(iii) ଚିତ୍ର 1.30(c) ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଦେଖିବା ଯେ A ଶୀର୍ଷଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AY}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର । ଏଣୁ ଉପରୋକ୍ତ କୌଣସି ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ ବା $\overrightarrow{BC}$ ବା $\overrightarrow{CB}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ।



(ଚିତ୍ର 1.31)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର - 1.31ରେ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇ ଭାଗରେ ପରିଣତ କରେ, ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ଅନୁରୂପ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର କ'ଣ ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ଦେଖିବା ।

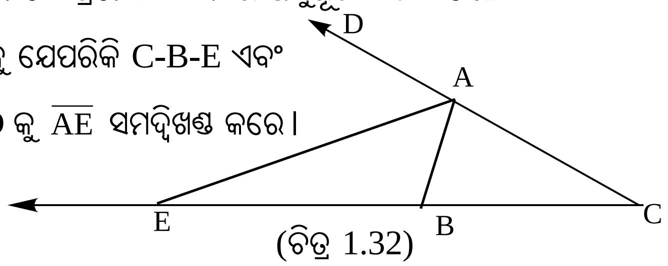
ଏହିପରି ଏକ ΔABC (ଯେଉଁଥିରେ $AC > AB$) ନିଜେ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ A ଶୀର୍ଷରେ ବହିଃସ୍ଥ $\angle BAD$ ଅଙ୍କନ କର (ଚିତ୍ର -1.31 ଦେଖ)। ଏହି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି ଏହା $\overrightarrow{CB}$ କୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ P ଦିଅ । ଏଠାରେ $\overrightarrow{AX}$, $\overline{CB}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ **ବହିର୍ବିଭାଜନ** କରିଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ । $\overline{CB}$ ର ବହିର୍ବିଭାଜନରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଅଂଶ ଦୁଇଟି ହେଲା $\overline{CP}$ ଏବଂ $\overline{BP}$ । B ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\overline{AP}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି ତାହା $\overline{AC}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ଉପପାଦ୍ୟ-3ର ଅନୁରୂପ ଧାରାରେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ଯେ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{CP}$ ।

ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ – 3 ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ବହିଃ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ – 1.2ର ଅନୁରୂପ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା –

ΔABC, $\overrightarrow{CB}$ ଉପରେ E ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି C-B-E ଏବଂ

$EB : EC = AB : AC$ ହେଲେ, $\angle BAD$ କୁ $\overline{AE}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।



(ଚିତ୍ର 1.32)

B ଠାରେ $\overline{AE}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମେୟ - 1.2ର ଅନୁରୂପ ଧାରାରେ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ।

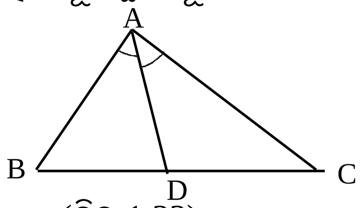
ଏଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ- **ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତରେ ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ ଓ ଏହି ବାହୁର ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ସେହି ଶୀର୍ଷରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରମେୟ-1.2, ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ବାହୁର ବହିର୍ବିଭାଜନ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (b)

1. ଚିତ୍ର 1.33 ରେ Δ ABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁ ଉପରିସ୍ଥ D ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରିକି $\overline{AD}$, $\angle$BAC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । ତଳେ ଥିବା ଅନୁପାତ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଅନୁପାତଟି ବାଛି ନିମ୍ନରେ ଥିବା ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

   Δ ABD ଓ Δ ADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ....

   (AB : DC, BD : AC, AB : AC, AD : BC)

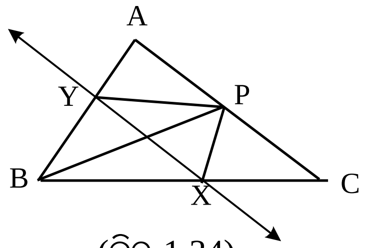


(ଚିତ୍ର 1.33)

2. Δ ABC ର $\angle$ABC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । AB = 4 ସେ.ମି., BC = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ AC = 5 ସେ.ମି. ହେଲେ, AD ଓ CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. Δ ABC ର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ c, a ଓ b ଏକକ ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $\angle$ACB ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

   (i) $AM = \dfrac{bc}{a+b}$ (ii) $BM = \dfrac{ca}{a+b}$



(ଚିତ୍ର 1.34)

4. (i) ଚିତ୍ର -1.34 ରେ, Δ ABC ର $\overline{AC}$ ବାହୁ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା $\overline{BP}$ । $\angle$BPC ଏବଂ$\angle$BPA ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AB}$ କୁ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{AC}$ ।

   (ii) ଚିତ୍ର -1.34 ରେ, $\angle$APB ଏବଂ$\angle$BPC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମାନ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ Y ଓ X ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଯଦି $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{AC}$ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, P, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

5. ଚିତ୍ର -1.34 ରେ Δ ABC ର $\overleftrightarrow{BP}$ ମଧ୍ୟମା । $\angle$APBର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overleftrightarrow{PY}$, $\overline{AB}$ କୁ Y ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି Y ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{YX}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି, ଯେପରି ତାହା $\overline{BC}$ କୁ X ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\overrightarrow{PX}$, $\angle$BPC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

6. ΔABC ରେ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BC}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AP}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{AQ}{QP}=\frac{AB+AC}{BC}$ ।

7. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର $\angle BAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣକୁ K ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣକୁ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overline{AB}$ ।

8. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\angle DAB$ ଓ $\angle DCB$ କୋଣଦ୍ୱୟର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଛେଦକରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle ABC$ ଓ $\angle ADC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଛେଦ କରିବେ ।

9. ΔABC ରେ $\angle B$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{AC}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AB}$ କୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ΔABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

10. ΔABC ରେ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BC}, \overline{CA}$ ଓ $\overline{AB}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ D,E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$ ।

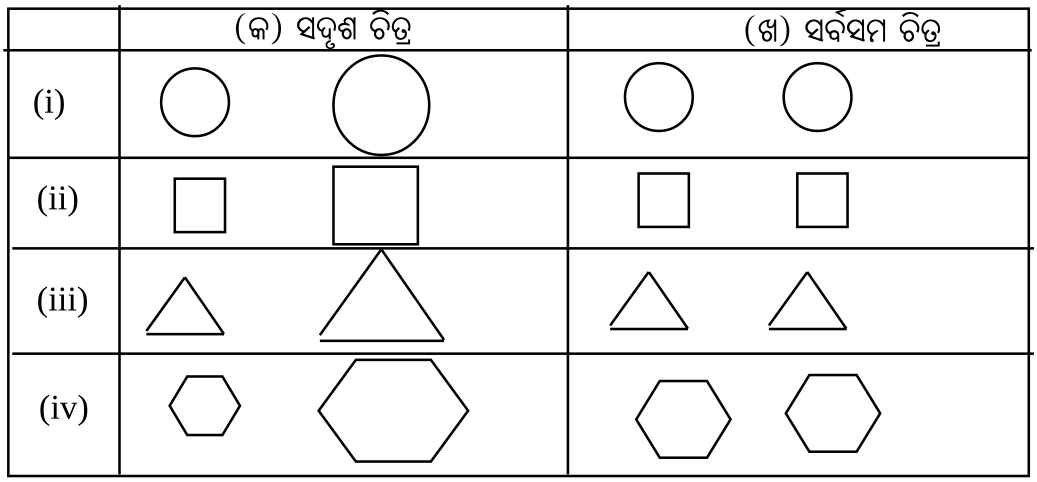
1.5 ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ (Similarity in Geometrical figures) :

କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖିଲେ, ଆମେ ସେ ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରଟି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଦୁଇଟି ଧାରଣା କରିଥାଉ । ଯଥା – (i) ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରଟି କିପରି ଦେଖାଯାଉଛି, ଅର୍ଥାତ୍ ତା'ର **ଆକୃତି** (shape) କିପରି;

(ii) ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରଟି, କେତେ ବଡ଼, ଅର୍ଥାତ୍ ତା'ର **ଆକାର** (size) କେତେ;

ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ରର ଆକୃତି ତଥା ଆକାର ଉଭୟ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟିକୁ ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର (Congruent figure) କୁହାଯାଏ, ଏ କଥା ତୁମେ ଜାଣିଛ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିର ଆକାର ସମାନ ବା ଅସମାନ ହେଉ, ଯଦି ଉଭୟ ଚିତ୍ରର ଆକୃତି ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିକୁ ସଦୃଶ (similar) ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।



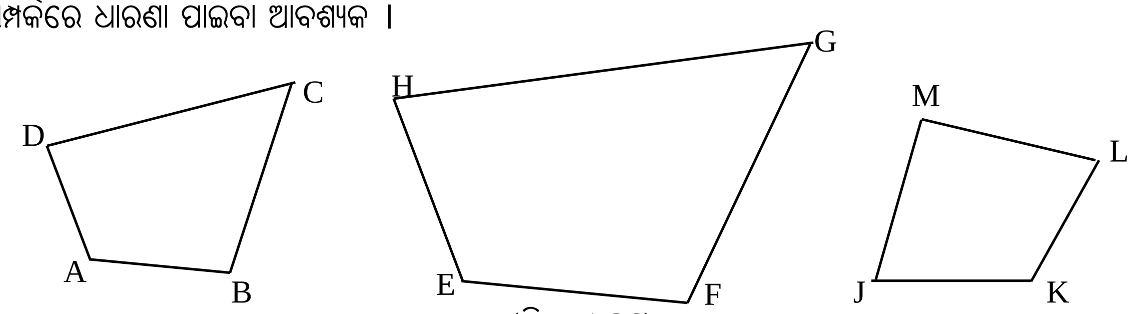
(ଚିତ୍ର 1.35)

ଚିତ୍ର -1.35 ରେ (କ) ସ୍ତମ୍ଭରେ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ (ଖ) ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି । ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, **ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ଚିତ୍ର ସର୍ବସମ ନ ହୋଇପାରନ୍ତି କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର ସର୍ବଦା ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ।**

ତୁମେ ଜାଣିଛ ଯେ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ । ସୁତରାଂ **ଦୁଇଟି ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ।**

1.5.1 ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତ (Conditions for Similarity) :

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ କେଉଁ କାରଣରୁ ସଦୃଶ ହେବେ ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଦୁଇଟି ବହୁଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଧାରଣା ପାଇବା ଆବଶ୍ୟକ ।



(ଚିତ୍ର 1.36)

ବର୍ତ୍ତମାନ୍ ଚିତ୍ର 1.36 ରେ ABCD ଓ EFGH ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ମାତ୍ର ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେହି ହେଲେ JKLM ଚତୁର୍ଭୁଜ ସହିତ ସଦୃଶ ନୁହେଁ । ABCD ଓ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ଥିବା କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ମାପି ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା –

(i) $\angle\mathbf{A} \cong \angle\mathbf{E}, \angle\mathbf{B} \cong \angle\mathbf{F}, \angle\mathbf{C} \cong \angle\mathbf{G}, \angle\mathbf{D} \cong \angle\mathbf{H}$ **ଏବଂ (ii)** $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{EF}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{FG}} = \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{GH}} = \frac{\mathbf{DA}}{\mathbf{HE}}$

ଏଠାରେ A ଓ E, B ଓ F, C ଓ G ଏବଂ D ଓ H ଶୀର୍ଷ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ **ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ (Corresponding Vertices)** କୁହାଯାଏ । ଯଥା – ଶୀର୍ଷ A ର ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ହେଲା ଶୀର୍ଷ E, B ର ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ହେଲା F ଇତ୍ୟାଦି । ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ମାନଙ୍କରେ ଥିବା କୋଣମାନ ଅନୁରୂପ । ଯଥା $\angle A$ ର ଅନୁରୂପ କୋଣ ହେଲା, $\angle E$, $\angle B$ ର ଅନୁରୂପ କୋଣ $\angle F$ ଇତ୍ୟାଦି । ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ବାହୁମାନଙ୍କୁ **ଅନୁରୂପ ବାହୁ (Corresponding Sides)** କୁହାଯାଏ । ଯଥା –

$\left.\begin{array}{l} A \xleftrightarrow{\text{ଅନୁରୂପ}} E \\ B \xleftrightarrow{\text{ଅନୁରୂପ}} F \end{array}\right] \rightarrow \overline{AB}$ ଅନୁରୂପ $\overline{EF}$

ସେହିପରି $\overline{BC}$ ଅନୁରୂପ $\overline{FG}$, $\overline{CD}$ ଅନୁରୂପ $\overline{GH}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

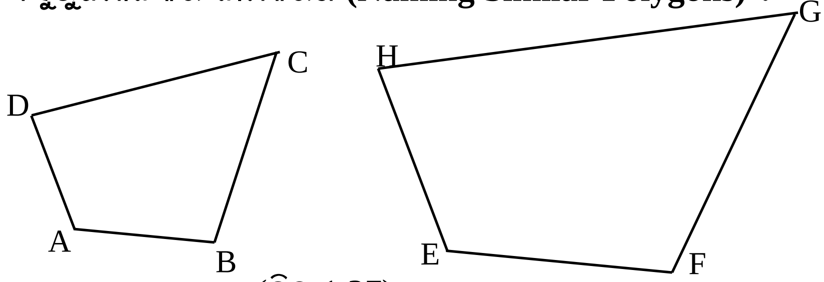
ସାଦୃଶ୍ୟର ସଙ୍କେତ ନେଇ ଆମେ ଲେଖିବା : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ~ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଏବଂ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରରେ (i) ସହ (ii) ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଉଥାଏ ତେବେ ABCD ଓ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସଦୃଶ ହେବେ । ଅନୁରୂପ ଭାବରେ ପଞ୍ଚଭୁଜ, ଷଡ଼ଭୁଜ ବା ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବହୁଭୁଜମାନଙ୍କର ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତ ଉଲ୍ଲେଖ କରିପାରିବା ।

ସଦୃଶ ବହୁଭୁଜ : ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁଥିବା ଦୁଇଟି ବହୁଭୁଜ ସଦୃଶ ହେବେ ଯଦି ସେମାନଙ୍କର

(i) ଅନୁରୂପ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନେ ସମାନୁପାତୀ ।

1.5.2 ସଦୃଶ ବହୁଭୁଜମାନଙ୍କର ନାମକରଣ (Naming Similar Polygons) :



(ଚିତ୍ର 1.37)

ଚିତ୍ର - 1.37 ରେ ABCD ଓ EFGH ର ସାଦୃଶ୍ୟ ଦର୍ଶାଇ ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜ ~ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ ଲେଖିବା ସମୟରେ ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସେମାନଙ୍କର କ୍ରମ ରକ୍ଷା କରି ଲେଖା ଯାଇଥାଏ । କାରଣ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow G$ ଏବଂ $D \leftrightarrow H$ । ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜ ଓ EFGH ଚର୍ତୁଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସାଦୃଶ୍ୟକୁ ଆମେ ସଂକେତରେ ଲେଖିପାରିବା ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ~ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ କିମ୍ବା BCDA ଚତୁର୍ଭୁଜ ~ FGHE ଚତୁର୍ଭୁଜ କିମ୍ବା CDAB ଚର୍ତୁଭୁଜ ~ GHEF ଚତୁର୍ଭୁଜ ଇତ୍ୟାଦି । କିନ୍ତୁ ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜ ~ GHEF ଚର୍ତୁଭୁଜ ଲେଖିବା ଠିକ୍ ନୁହେଁ ।

1.6 ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ (Similarity in Triangles) :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବରେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟ ଏକ ବହୁଭୁଜ (ଯାହାର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ତିନି) । ଏଣୁ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ସଂଜ୍ଞା ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ବହୁଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାର ଅନୁରୂପ । ଏଣୁ ଆମେ କହିବା ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସଦୃଶ ହେବେ, ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟିର -

(1) ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନ ସମାନୁପାତୀ; (2) ଅନୁରୂପ କୋଣମାନ ସର୍ବସମ ।

ଯଥା : ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ଏବଂ $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ ହେଲେ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ହେବ ।

ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ - ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ : $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$

ଅନୁରୂପ ବାହୁ : $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$, $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$

ଅନୁରୂପ କୋଣ : $\angle A \leftrightarrow \angle P$, $\angle B \leftrightarrow \angle Q$, $\angle C \leftrightarrow \angle R$

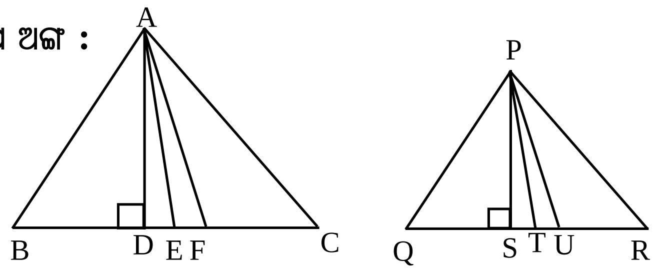
ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ :

ଚିତ୍ର -1.38 ରେ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ।

ΔABCରେ, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

$\overline{AF}$, $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

$\overline{AE}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା ।



(ଚିତ୍ର 1.38)

ସେହିପରି ΔPQR ରେ, $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

$\overline{PU}$, $\angle QPR$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । $\overline{PT}$, $\overline{QR}$ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା ।

ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ A ଓ P ରୁ ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେତୁ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{PS}$ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର **ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତା;**

ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷରୁ ଅଙ୍କିତ ମଧ୍ୟମା କାରଣରୁ, $\overline{AE}$ ଓ $\overline{PT}$, ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର **ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମା;**

ଏବଂ $\overline{AF}$ ଓ $\overline{PU}$ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର **ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ** ।

ଆଉ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଲମ୍ବ, ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମା, ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟ ଅଛି । ନିଜେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ରକରି ଦେଖାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ତ୍ରିଭୁଜ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତୋଟି ଧର୍ମ :

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜ ନିଜ ସହ ସଦୃଶ, ଅର୍ଥାତ୍ $\Delta ABC \sim \Delta ABC$

(ii) $\Delta ABC \sim \Delta PQR \Leftrightarrow \Delta PQR \sim \Delta ABC$

(iii) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\Delta DEF \sim \Delta PQR \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$

ସାଦୃଶ୍ୟ ଧର୍ମ ଅନୁଯାୟୀ (i), (ii) ଏବଂ (iii) କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ସାଦୃଶ୍ୟର ସ୍ୱତୁଲ୍ୟ, ପ୍ରତିସମ ଏବଂ ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର ଗାଣିତିକ ବ୍ୟବହାର ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁରୁତ୍ୱ ରହିଛି ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଏଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ସହଜରେ କରାଯାଇପାରିବ ।

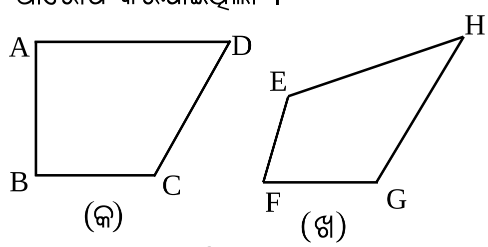
1.6.1 ତ୍ରିଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସର୍ତ୍ତ (Conditions on Triangle-Similarity) :

ଦୁଇଟି ବହୁଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ ଲାଗି ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତ ଆରୋପ କରଯାଇଥିଲା ।

1. ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିତା,

2. ଅନୁରୂପ କୋଣମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା ।

ଆସ ଦେଖିବା ସର୍ତ୍ତଦ୍ୱୟ କିପରି ପରସ୍ପର ନିରପେକ୍ଷ ଅଥବା ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ । ନିମ୍ନ ପରୀକ୍ଷାଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧାନ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.39)

ପରୀକ୍ଷା - 1.

କେବଳ ସର୍ତ୍ତ - 1 କୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜ ଚିତ୍ର 1.39 ରେ ନିଆଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର -1.39 (କ) ରେ $m\angle ABC = 90^0$, $AB = BC = 1$ ଏକକ ଏବଂ $AD = CD = 2$ ଏକକ ନେଇ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ ହେଇଛି ।

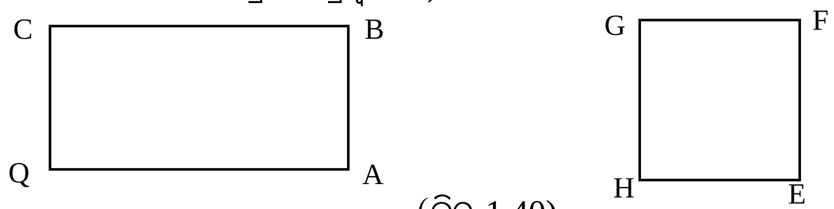
ଚିତ୍ର 1.39 (ଖ) ରେ $m\angle EFG = 45^0$, $EF = FG = 2$ ଏକକ ଏବଂ $EH = GH = 4$ ଏକକ ନେଇ ଚତୁର୍ଭୁଜ EFGH ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।

ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$;

କିନ୍ତୁ ଅନୁରୂପ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି, ଯଥା : $\angle B$ ଓ $\angle F$ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି ।

ପରୀକ୍ଷା - 2

କେବଳ ସର୍ତ୍ତ - 2 କୁ ସିଦ୍ଧକରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜ ଚିତ୍ର -1.40 ରେ ନିଆଯାଇଛି । ଏଠାରେ ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଏବଂ EFGH ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର । ଚିତ୍ରଦ୍ୱୟରେ, AB = EF ।



(ଚିତ୍ର 1.40)

ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ABCD ଓ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ ଦୁଇଟିର ଅନୁରୂପ କୋଣମାନ ସର୍ବସମ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ସମକୋଣ), କିନ୍ତୁ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ନୁହନ୍ତି । ଯଥା $\frac{AB}{EF} = 1$, କିନ୍ତୁ $\frac{BC}{FG} \neq 1$

ଉଭୟ ପରୀକ୍ଷାରୁ ହୃଦ୍‌ବୋଧ ହୋଇଥିବ ଯେ ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ସମାନୁପାତିତା ଏବଂ ଅନୁରୂପ କୋଣମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ ନୁହନ୍ତି । ସେ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତ ପରସ୍ପର ନିରପେକ୍ଷ ।

କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିତା ଏବଂ ଅନୁରୂପ କୋଣମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା ସର୍ତ୍ତଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ । ଅର୍ଥାତ୍ ଗୋଟିଏ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ସର୍ତ୍ତଟି ସ୍ୱତଃ ସିଦ୍ଧ ହୁଏ । ଉପପାଦ୍ୟ 4 ଓ 5 ରେ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

1.6.2 ତ୍ରିଭୁଜ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ପର୍କିତ ଉପପାଦ୍ୟ (Theorems on Triangle-Similarity) :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସର୍ତ୍ତକୁ ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ଭାବେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 4

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ।

(If the angles of a triangle are congruent to the corresponding angles of another, then the triangles are similar.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ଏବଂ $\angle C \cong \angle F$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

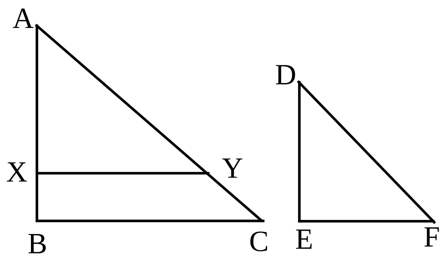
ଅଙ୍କନ : ମନେକର AB > DE । $\overline{AB}$ ଉପରେ X ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ, ଯେପରି A-X-B ଏବଂ AX = DE

$\overline{XY}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଯେପରି $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ A-Y-C

ପ୍ରମାଣ : $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ (ଅଙ୍କନ)

$\Rightarrow \angle AXY \cong \angle B$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\Rightarrow \angle AXY \cong \angle E$ ($\because \angle B \cong \angle E$ ଦତ୍ତ) .....(1)



(ଚିତ୍ର 1.41)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\angle AYX \cong \angle F$ .... (2)

ΔAXY ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ, $\angle AXY \cong \angle E$ [(1) ଅନୁଯାୟୀ]

$\angle A \cong \angle D$ (ଦତ୍ତ) ଏବଂ $AX = DE$ (ଅଙ୍କନ) ।$\therefore$ $\Delta AXY \cong \Delta DEF$ (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AY = DF$ (ଅନୁରୂପ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ...... (3)

ΔABC ରେ, $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{BC}$ (ଅଙ୍କନ)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ [$\because$ $AX = DE$ (ଅଙ୍କନ) ଓ $AY = DF$ ((3)ରେ ପ୍ରାପ୍ତ] .... (4)

$\overline{BA}$ ଉପରେ Z ବିନ୍ଦୁ ନେଇ (ଯେପରି $BZ = ED$) ଏବଂ Z ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ $\overline{AC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ ......(5)

(4) ଓ (5) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ ......(6)

ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ (ଦତ୍ତ)

ଏବଂ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ [(6) ଅନୁଯାୟୀ]

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ଯଦି $DE > AB$ ହୁଏ, ତେବେ $\overline{DE}$ ଉପରେ X ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଅନୁରୂପ ଭାବେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ।)

ଟୀକା : ସଂକ୍ଷେପରେ ସାଦୃଶ୍ୟର ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ **'କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ'** (A-A-A Similarity) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (1) : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତୃତୀୟ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସ୍ୱତଃସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।($\because$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 180^0 ।)

ଏଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି । ସାଦୃଶ୍ୟର ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ **'କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ'** କୁହାଯାଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : ସଦୃଶକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ (ଗୋଟିକର ତିନିକୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ତିନିକୋଣ ସହ ସର୍ବସମ) ର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ । ଉପପାଦ୍ୟ - 4 ର ପ୍ରମାଣରେ (6) ସୂଚିତ ଉକ୍ତି ଅନୁଯାୟୀ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।

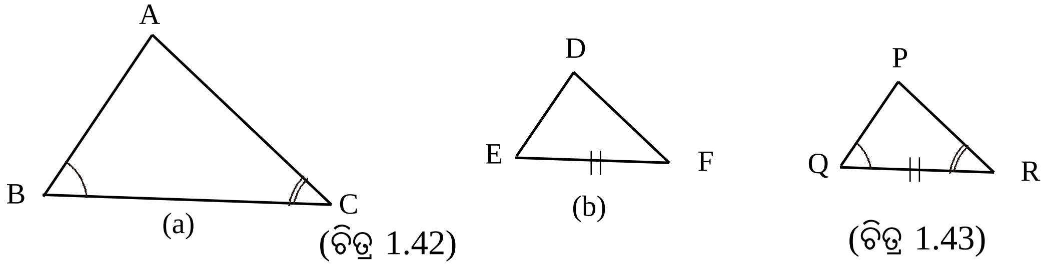
ଉପପାଦ୍ୟ - 5

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ।

(If the lengths of three sides of a triangle are proportional to the lengths of the three corresponding sides of another triangle, then the two triangles are similar.)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ଓ Δ DEF ମଧ୍ୟରେ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta$ DEF



(ଚିତ୍ର 1.42) (ଚିତ୍ର 1.43)

ଅଙ୍କନ : Δ PQR ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ, ଯେପରି $\overline{QR} \cong \overline{EF}$, $\angle Q \cong \angle B$ ଓ $\angle R \cong \angle C$

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ, $\angle B \cong \angle Q$ ଓ $\angle C \cong \angle R$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ [ଉପପାଦ୍ୟ - 4, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1)] ....(1)

$\Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$ [ଉପପାଦ୍ୟ - 4, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2)])

$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$ [QR = EF (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ)] ....(2)

ମାତ୍ର $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ (ଦତ୍ତ) ....(3)

(2) ଏବଂ (3) $\Rightarrow \frac{AC}{PR} = \frac{AC}{DF}$ ଏବଂ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow$ PR = DF ଓ PQ = DE .... (4)

$\because$ ΔPQR ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ QR = EF (ଅଙ୍କନ),PR = DF ଏବଂ PQ = DE [(4) ଅନୁଯାୟୀ]
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta DEF$ (. ବା-ବା-ବା ସର୍ବସମତା) $\Rightarrow \Delta PQR \sim \Delta DEF$ .... (5)

(1) ଓ (5) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

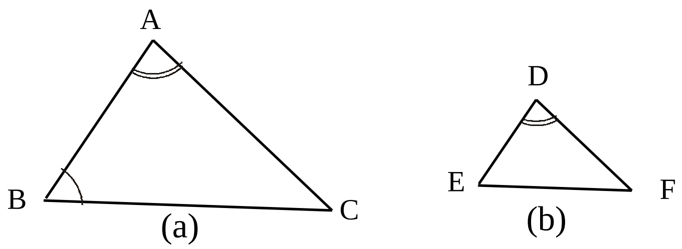
ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପପାଦ୍ୟ - 5 ରେ ଥିବା ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ **'ବା-ବା-ବା ସାଦୃଶ୍ୟ'** (S-S-S SImilarity) କୁହାଯାଏ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 6

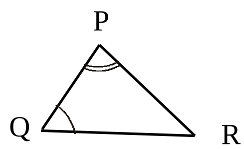
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ଏବଂ ବାହୁମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ।

(If the lengths of two sides of a triangle are proportional to the lenghts of the corresponding two sides of another triangle and the angles included between those sides are congruent, then the trianlges are similar.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ଓ $\angle A \cong \angle D$ ।



(ଚିତ୍ର 1.44)



(ଚିତ୍ର 1.45)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ।

ଅଙ୍କନ : ΔPQR ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ, ଯେପରି $\overline{PQ} \cong \overline{DE}$, $\angle P \cong \angle A$, $\angle Q \cong \angle B$ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ, $\angle A \cong \angle P$ ଓ $\angle B \cong \angle Q$ (ଅଙ୍କନ)

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 4 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1)) ..... (1)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 4 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2)) ..... (2)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{PR}$ ($\because$ DE = PQ ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ମାତ୍ର $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ଦତ୍ତ) ..... (3)

(2) ଓ (3) $\Rightarrow \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AC}{DF} \Rightarrow PR = DF$ .... (4)

$\because$ ΔPQR ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\overline{PQ} \cong \overline{DE}$,
$\overline{PR} \cong \overline{DF}$ ((4) ଅନୁଯାୟୀ)

$\angle P \cong \angle D$ ($\angle A \cong \angle D$ (ଦତ୍ତ), $\angle P \cong \angle A$ (ଅଙ୍କନ))

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta DEF$ (ବା-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow \Delta PQR \sim \Delta DEF$ .... (5)

(1) ଓ (5) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପପାଦ୍ୟ - 6 ରେ ଥିବା ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ **'ବା-କୋ-ବା ସାଦୃଶ୍ୟ' (S-A-S Similarity)** କୁହାଯାଏ ।

1.6.3 ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ :

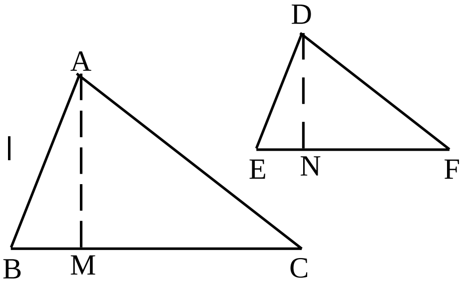
ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟମାନଙ୍କରେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ କେଉଁ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ଆମେ ଜାଣିଲେ ଏବଂ ତହିଁରୁ ଉଦ୍ଭବ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ଆମେ ଜାଣିଲେ । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଟି ହେଲା, ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ଅଟନ୍ତି । ଏହି ଜ୍ଞାନର ଉପଯୋଗ କରି ଆଉ କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱ ପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନାରେ ପଢ଼ିବା ।

ପ୍ରମେୟ - 1.3 : **ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।**

(**The areas of two similar triangles are proportional to the squares of the lenghts of their corresponding sides.**)

ଦତ୍ତ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ଅର୍ଥାତ୍, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\dfrac{\Delta ABC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta DEF\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{CA^2}{FD^2}$



ଅଙ୍କନ : $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{DN} \perp \overline{EF}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABM ଓ Δ DEN ମଧ୍ୟରେ

$\angle AMB \cong \angle DNE$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ - ଅଙ୍କନ)

$\angle ABM \cong \angle DEN$ (ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

(ଚିତ୍ର 1.46)

$\therefore \ \Delta ABM \sim \Delta DEN$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) $\Rightarrow \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{AB}{DE}$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂଜ୍ଞା) ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂଜ୍ଞା).........(2)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BC}{EF}$ ....(3)

$\dfrac{\Delta ABC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta DEF\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{\frac{1}{2} BC \times AM}{\frac{1}{2} EF \times DN} = \dfrac{BC}{EF} \times \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BC}{EF} \times \dfrac{BC}{EF}$ ((3) ଅନୁଯାୟୀ)

$= \dfrac{BC^2}{EF^2}$ ....(4)

ମାତ୍ର $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ ....(5)

(4) ଓ (5) $\Rightarrow \dfrac{\Delta ABC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta DEF\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

(କ - ବିଭାଗ)

1.ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ, $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$, AB = 3 ସେ.ମି., BC = 5 ସେ.ମି. ଏବଂ DE = 7.5 ସେ.ମି. ହେଲେ, EF = ------ ସେ.ମି. (10, 10.5, 12, 12.5)

(ii) ΔABC ରେ AB = 5 ସେ.ମି., BC = 7 ସେ.ମି., CA = 8 ସେ.ମି.; ΔPQR ରେ PQ = 10 ସେ.ମି., QR = 14 ସେ.ମି. । PR = ----- ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔABC ଓ ΔPQR ସଦୃଶକୋଣୀ ହେବେ ।

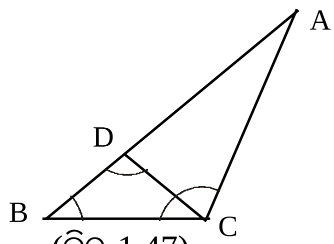
(12, 16, 20, 24)

(iii) ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ $\angle B \cong \angle Q$ । ΔABC ର $AB = 8$ ସେ.ମି. ଏବଂ $BC = 12$ ସେ.ମି. । ΔPQR ର $PQ = 12$ ସେ.ମି. ଏବଂ $QR = 18$ ସେ.ମି. । ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔPQR ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ...ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେବ ।

(84, 96, 104, 108)

(iv) ΔABC ରେ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AC}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $AB = 12$ ସେ.ମି. ଓ $BC = 9$ ସେ.ମି. ହେଲେ, $AP : AC$................. (4:3, 3:4, 7:4, 4:7)

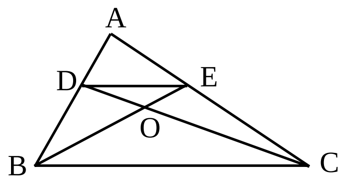
(v) ଦୁଇଟି ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 16 : 25 ହେଲେ, ସେହି ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ଯୋଡ଼ାର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ..... । (4:5, 2:5, 5:4, 5:2)



(ଚିତ୍ର 1.47)

(vi) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ, $m\angle B = 50^0$, $m\angle BDC = 100^0$ ଓ $\Delta DBC \sim \Delta CBA$ ହେଲେ, $m\angle ACD$......

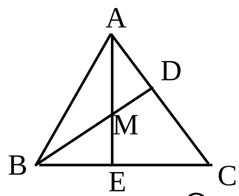
(60^0, 70^0, 80^0, 90^0)



(ଚିତ୍ର 1.48)

(vii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ, ΔABE ଓ ΔACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେଲେ, $\Delta BOC \sim$ ....

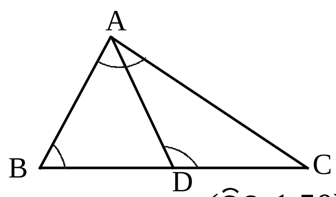
(ΔADE, ΔDOB, ΔEOD, ΔOEC)



(ଚିତ୍ର 1.49)

(viii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.49 ରେ ΔABC ର $\overline{AE}$ ଓ $\overline{BD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AC}$ ପ୍ରତି ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରୁ ଲମ୍ବ, ତେବେ $\Delta BEM \sim \Delta$..........

[BEA, ABD, BDC, AEC]



(ଚିତ୍ର 1.50)

(ix) ଚିତ୍ର 1.50 ରେ $\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ D ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $\angle ADC \cong \angle BAC$ ହେଲେ, $CB \cdot CD$ = -----

(AC^2, AB^2, $AD \cdot AB$, $AD \cdot AC$)

(x) ΔABC ରେ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । $AB : AC = 2:3$ ଏବଂ $BC = 15$ ସେ.ମି. ହେଲେ, BM = ...ସେ.ମି. (6, 9, 10, 12)

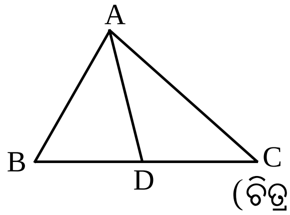
(ଖ - ବିଭାଗ)

2. (i) ΔABC ରେ $AB = 2.5$ ସେ.ମି., $BC = 2$ ସେ.ମି., $AC = 3.5$ ସେ.ମି.ଏବଂ ΔPQR ରେ $PQ = 5$ ସେ.ମି., $QR = 4$ ସେ.ମି., $PR = 7$ ସେ.ମି. । $m\angle A = x^0$ ଓ $m\angle Q = y^0$ ହେଲେ, $m\angle B$, $m\angle C$, $m\angle P$ ଓ $m\angle R$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ΔABC ଓ ΔDEF ରେ $\angle B \cong \angle E$, $AB = 4$ ସେ.ମି., $BC = 6$ ସେ.ମି., $EF = 9$ ସେ.ମି. ଓ $DE = 6$ ସେ.ମି. । ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 20 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔDEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର 9 ଗୁଣ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟିର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) ଚିତ୍ର 1.51 ରେ, $\angle BAC \cong \angle ADC$, $AC = 12$ ସେ.ମି. ଓ $BC = 15$ ସେ.ମି. । $\angle ADC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 32 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.51)

(v) ΔABC ର $AB = 5$ ସେ.ମି., $BC = 7$ ସେ.ମି. ଓ $CA = 9$ ସେ.ମି. । $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ ଏବଂ ΔPQR ର ପରିସୀମା 63 ସେ.ମି. ହେଲେ, PQ, QR ଓ PR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(vi) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$; $AB = 5$ ସେ.ମି., $BC = 12$ ସେ.ମି., $AC = 13$ ସେ.ମି., ଓ $QR = 8$ ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔPQR କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(vii) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ । ΔABC ପରିସୀମା 60 ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 81 ବର୍ଗ ସେ.ମି.ଏବଂ ΔPQR ର ପରିସୀମା 80 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର

(a) ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

(b) ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

(c) ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମା ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

4. ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

5. ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

6. ପ୍ରମାଣ କର : ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର

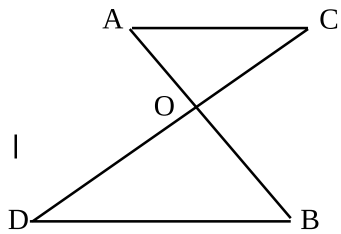
(a) ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(b) ଅନୁରୂପ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(c) ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(d) ପରିସୀମାର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ।

7. Δ ABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁ ଉପରେ P ଓ Q ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି ΔBQP ଓ ΔCPQ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.52)

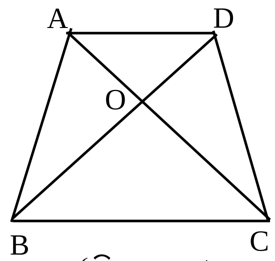
8. ଚିତ୍ର 1.52 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ O ।

(a) AO . OD = BO . OC ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ΔAOC ~ ΔBOD ।

(b)CO . OD = AO . OB ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ΔAOC ~ ΔDOB

(c)ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DB}$ ସମାନ୍ତର ହେବେ ?

9. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ର $\overline{AB}$ II $\overline{DC}$ । କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । AO = 3 ସେ.ମି. ଏବଂ OC = 5 ସେ.ମି. । ΔAOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 36 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔCOD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.53)

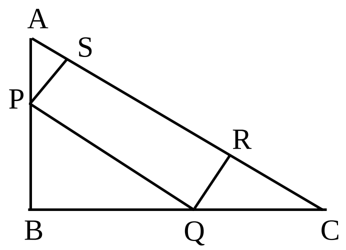
10. ଚିତ୍ର 1.53 ରେ ΔABC ଓ ΔDBC ଉଭୟ ଏକ ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ ।

$\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ O ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\Delta ABD\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta BCD\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AO}{OC}$

(ଗ - ବିଭାଗ)

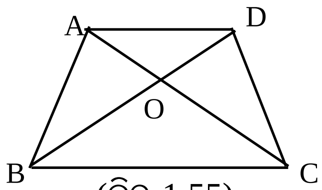
11. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିଭୁଜଟି ଯେଉଁ ଚାରୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ, ସେମାନେ ସର୍ବସମ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଳ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସଦୃଶ । ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ମୂଳତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ।



(ଚିତ୍ର 1.54)

12. ଚିତ୍ର 1.54 ରେ, ΔABC ର $\angle$ABC ଏକ ସମକୋଣ । PQRS ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
ΔAPS ~ ΔQCR ~ ΔPQB ~ ΔACB

13. ଚିତ୍ର 1.55 ରେ, $\overline{AB}$ II $\overline{DC}$ ।
ΔADO ~ ΔBCO ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AD = BC
(ସୂଚନା : ପ୍ରଶ୍ନ 5 ରେ ପ୍ରମାଣିତ ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କର)



(ଚିତ୍ର 1.55)

14. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AD}$ II $\overline{BC}$ । $\angle$ABD $\cong$ $\angle$DCB ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ BD^2=AD . BC ।

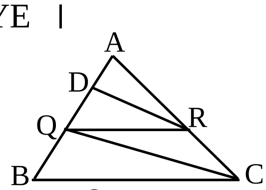
15. ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ବାହୁ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ΔABC ର ମଧ୍ୟମା $\overline{AD}$, $\overline{XY}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

16. ΔABC ରେ $\overline{AD}$ ଏକ ମଧ୍ୟମା ଏବଂ $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ E । $\overrightarrow{BE}$ ରଶ୍ମି $\overline{AC}$ କୁ X ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $BE = 3EX$ ।

17. ΔABC ରେ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ଏବଂ $AD^2 = DC \,.\, BD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ (i) $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ (ii) ΔABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ΔCAD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ AB^2 ଓ AC^2 ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

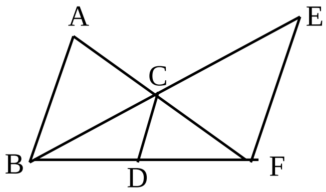
18. ΔABC ଓ ΔDEF ରେ $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$ । $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) $\Delta AXC \sim \Delta DYF$ (ii) $\Delta AXB \sim \angle DYE$ ।

19. ଚିତ୍ର 1.56 ରେ ΔABC ର $\overline{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ Q ଏକ ବିନ୍ଦୁ, $\overline{QR} \parallel \overline{BC}$ ଯେପରିକି A-R-C, $\overline{DR} \parallel \overline{QC}$ ଯେପରିକି A-D-B । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $AQ^2 = AD \times AB$



(ଚିତ୍ର 1.56)

20. ଚିତ୍ର 1.57 ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ଏବଂ $\overline{AF}$ ଓ $\overline{BE}$ ପରସ୍ପରକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $EF \times BD = DF \times AB$

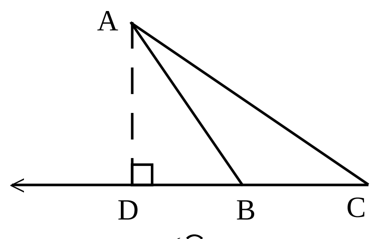


(ଚିତ୍ର 1.57)

21. ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ, ପ୍ରମାଣ କର ।

22. A-P-B ଓ A-Q-B ହେଲେ ଏବଂ $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ଓ Q ଅଭିନ୍ନ ।

23. ଚିତ୍ର 1.58 ରେ ΔABC ର $\angle ABC$ ଏକ ସ୍ଥୁଳ କୋଣ । A ରୁ $\overrightarrow{BC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁ D । ଯଦି $AD^2 = BD \,.\, DC$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle BAD$ ଓ $\angle CAD$ ପରସ୍ପର ଅନୁରୂପକ ।



(ଚିତ୍ର 1.58)

24. ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ । ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ XBCY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ΔAXY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଆଠଗୁଣ ହେଲେ, $AX : BX$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

25. ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । $\overrightarrow{AG}$ ରଶ୍ମି, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ E, F ଓ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AE : EG = AF : AG$ ।

1.7. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କେତେକ ଉପାଦେୟ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ପ୍ରମେୟ ଓ ଏହାର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

ପ୍ରମେୟ - 1.4 : ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣର ଶୀର୍ଷରୁ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱାରା ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ, ସେ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଳ ତ୍ରିଭୁଜ ସହିତ ସଦୃଶ ଓ ପରସ୍ପର ସଦୃଶ ।

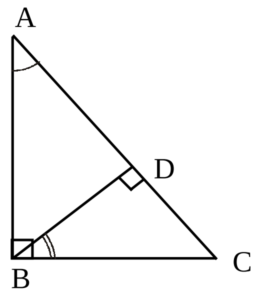
(When a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right-triangle to its hyptenuse, each of the two triangles formed is similar to the original triangle and those are mutually similar.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\angle ABC$ ସମକୋଣ । $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । ଉତ୍ପନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ΔABD ଏବଂ ΔBCD ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\Delta ABD \sim \Delta ACB$

(ii) $\Delta BCD \sim \Delta ACB$

(iii) $\Delta ABD \sim \Delta BCD$



(ଚିତ୍ର 1.59)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔACB ମଧ୍ୟରେ,

$\because \begin{cases} \angle BAD \cong \angle BAC \\ \angle ADB \cong \angle ABC \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ACB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) .... (1) .((i)ପ୍ରମାଣିତ)

ΔBCD ଓ ΔACB ମଧ୍ୟରେ,

$\because \begin{cases} \angle BCD \cong \angle ACB \text{ ଏବଂ} \\ \angle BDC \cong \angle ABC \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta BCD \sim \Delta ACB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) .... (2) ((ii) ପ୍ରମାଣିତ)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ) ((iii) ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ΔABC ର $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ହେଲେ

(a) $AB^2 = AD \,.\, AC$, (b) $BC^2 = CD \,.\, AC$ ଏବଂ (c) $BD^2 = AD \,.\, DC$

(a) ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.59 ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ)

ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ : $\Delta ABD \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ ନେଇ, ପାଇବା $AB^2 = AD \,.\, AC$

(b) ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.59 ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ)

ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ : $\Delta BCD \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$ ନେଇ, ପାଇବା $BC^2 = AC \,.\, DC$

(c) ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.59 ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ)

ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ : $\Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BD}$ ନେଇ, ପାଇବା $BD^2 = AD \cdot DC$

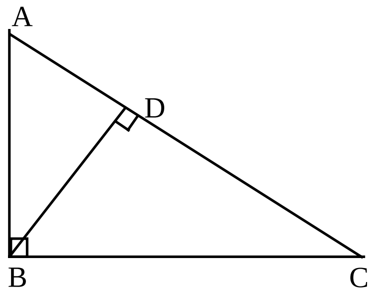
ସଦୃଶ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉଦାହରଣ :

ଉଦାହରଣ - 1 : ପ୍ରମେୟ - 1.4 ର ପ୍ରୟୋଗ କରି, ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କର ।

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\angle ABC$ ଏକ ସମକୋଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ଅଙ୍କନ : $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ (କର୍ଣ୍ଣ) ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.60)

ପ୍ରମାଣ : $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (ପ୍ରମେୟ - 1.4)

$\Rightarrow AB^2 = AD \times AC$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (a))........(1)

ପୁନଶ୍ଚ $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (ପ୍ରମେୟ - 1.4)

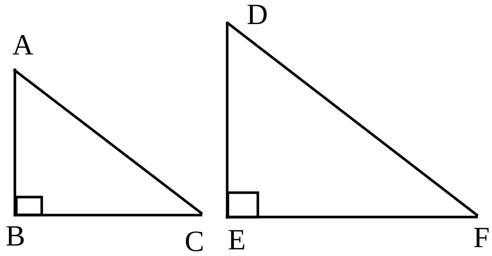
$\Rightarrow BC^2 = CD \cdot CA$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (b))..........(2)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AD \times AC + CD \cdot CA$ ((1) ଓ (2) ଅନୁଯାୟୀ)

$= AC (AD + CD) = AC \times AC = AC^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ. ପ୍ରମାଣକର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ।

ଦତ୍ତ : ΔABC ର $\angle B$ ଏବଂ ΔDEF ର କୋଣ $\angle E$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ ଏବଂ $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.61)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{DF^2}{DE^2} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} - 1 = \frac{DF^2}{DE^2} - 1$. (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 1 ବିୟୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow \frac{AC^2 - AB^2}{AB^2} = \frac{DF^2 - DE^2}{DE^2} \Rightarrow \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{EF^2}{DE^2}$ (ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{EF}{DE} \Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DE}$. (ସମାନୁପାତର ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) ....(1)

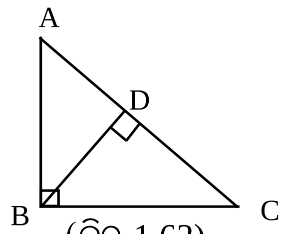
ΔABC ଓ ΔDEF ରେ

$$\because \begin{cases} \angle B \cong \angle E \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)} \\ \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DE} \text{. ((1) ରେ ପ୍ରମାଣିତ)} \end{cases}$$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ବା-କୋ-ବା ସାଦୃଶ୍ୟ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (d)

(‘କ’ ବିଭାଗ)



(ଚିତ୍ର 1.62)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଚିତ୍ର 1.62 ରେ ଥିବା ΔABC ରେ $m\angle ABC = 90^0$

ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,

$m\angle ABD$ = ... [$m\angle BAD$, $m\angle DBC$, $m\angle DCB$, $2m\angle BAD$]

(ii) ଚିତ୍ର 1.62 ରେ ଥିବା ΔABC ରେ $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ହେଲେ,

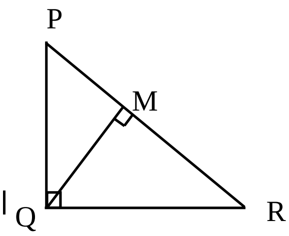
(a) $AB^2 = AD \times$ ..... [BC, CD, AC, BD]

(b) $BC^2 = AC \times$ ..... [DC, AD, BD, AB]

(c) $BD^2 = DC \times$ ..... [AC, BC, AB, AD]

(‘ଖ’ ବିଭାଗ)

2. ଚିତ୍ର 1.63 ରେ ଥିବା ΔPQR ର $m\angle PQR = 90^0$ ଏବଂ $\overline{QM} \perp \overline{PR}$



(ଚିତ୍ର 1.63)

(i) QM = 12 ସେ.ମି., ଏବଂ PM = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ, PR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) PQ = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ PM = 3 ସେ.ମି. ହେଲେ, PR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) QR = 12 ସେ.ମି. ଏବଂ MR = 9 ସେ.ମି. ହେଲେ, PM ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) PQ = 12 ସେ.ମି. ଓ RM = 7 ସେ.ମି. ହେଲେ, PM ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) PQ = 8 ସେ.ମି. ଓ QR = 15 ସେ.ମି. ହେଲେ, QM ଓ MR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

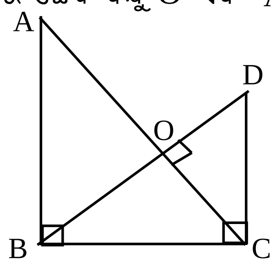
3. ଚିତ୍ର 1.64 ରେ $m\angle ABC = m\angle DCB = 90^0$ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ।

OC = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ OD = 4 ସେ.ମି. ହେଲେ,

(i) BO ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର; (ii) OA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର;

(iii) BC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର; (iv) AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ

(v) CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର;



(ଚିତ୍ର 1.64)

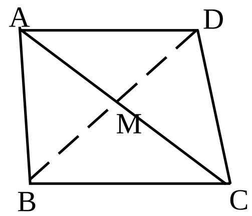
('ଗ' ବିଭାଗ)

4. ΔABC ରେ $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । $AD = p$ ଏକକ ଏବଂ $BD = q$ ଏକକ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (i) $BC = \dfrac{q(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$ (ii) $AB = \dfrac{p(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$

5. ΔABC ରେ, $m\angle ABC = 90^0$ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AB^2 : BC^2 = AD : DC$ ।

6. ΔABC ରେ, $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $BC^2 = AC . BD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{BD}$ ହେଉଛି $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

7. ଚିତ୍ର 1.65 ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ
$m\angle ABC = m\angle ADC = 90^0$ ଏବଂ $AB = AD$ ।
କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ M ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ
$AM \times MC = DM^2$ (ପ୍ରମେୟ -1.4 ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର) ।



(ଚିତ୍ର 1.65)

8. Δ ABC ରେ $m\angle ABC = 90^0$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AC}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AE^2 : EC^2 = AD : DC$

9. Δ ABC ରେ, $m\angle BAC = 90^0$ ଏବଂ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle ADC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\dfrac{AB \times AC^3}{2BC^2}$

10. Δ ABC ର $\angle ABC$ ସମକୋଣ, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BD}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $BE^2 : DE^2 = AC : AD$ ।

■ ■ ■