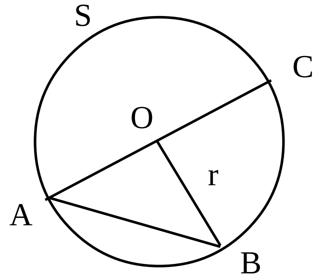
ବୃତ୍ତ

(CIRCLE)

2.1 ମୌଳିକ ଧାରଣା (Basic Concepts) :

ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତା' ମଧ୍ୟରେ ତ୍ରିଭୁଜ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଆଦି ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କରିବା ଶିଖିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ତଥ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସରଳରେଖା, ତ୍ରିଭୁଜ, ଆୟତଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର ପରି ବୃତ୍ତ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍ ବା ସମାହାର ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରରେ ବୃତ୍ତ ଗଠିତ ତାହା ଆମେ ବୃତ୍ତର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଜାଣିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତ (Circle) କୁହାଯାଏ ।

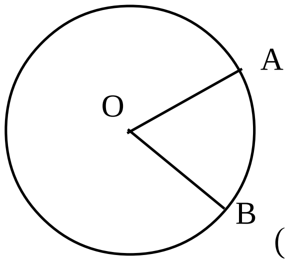


(ଚିତ୍ର 2.1)

ଚିତ୍ର 2.1 ରେ ବହି ପୃଷ୍ଠାର ସମତଳରେ O ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । O ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରତାରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମତଳରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍ S କୁ ଆମେ ଏକ ବୃତ୍ତ କହିବା । S ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O ଠାରୁ r ଦୂରତାରେ ଅଛି । ଅର୍ଥାତ୍ $OA = OB = OC = r$ । ଏଠାରେ O କୁ ବୃତ୍ତ S ର **କେନ୍ଦ୍ର (Centre)** ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା r କୁ ବୃତ୍ତର **ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (radius)** କୁହାଯାଏ ।

ସୁତରାଂ କେବଳ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବୃତ୍ତଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତାକୁ ବୁଝିଥାଉ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର O ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୁଝିଥାଉ । ଅର୍ଥାତ **ବୃତ୍ତର 'ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ' ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ 'ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ' ହେଉଛି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ।**

ଯଥା : ଚିତ୍ର 2.2ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି 2 ସେ.ମି. (ଯଦି OA = 2 ସେ.ମି.) ଏବଂ $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ହେଉଛନ୍ତି ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।



(ଚିତ୍ର 2.2)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

1. ଆମର ସମସ୍ତ ଆଲୋଚନାରେ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।

2. ପ୍ରମେୟ 2.2ରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ତେଣୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତଟି ସୂଚିତ ହୁଏ । ଉପରୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ S କୁ (ଚିତ୍ର 2.1) ଆମେ ABC ବୃତ୍ତ ନାମରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

3. ABC ବୃତ୍ତକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଚିହ୍ନ 'ABC ⊙' ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

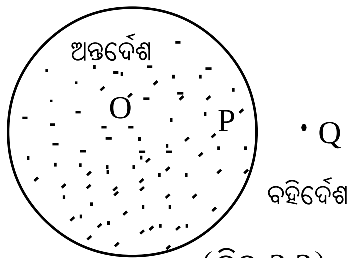
ଜ୍ୟା (Chord) : ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ ।

ବ୍ୟାସ (Diameter) : ଯେଉଁ ଜ୍ୟାରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ ସେହି ଜ୍ୟାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 2.1ରେ $\overline{AB}$ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ $\overline{AC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ, AO = OC । ଯଦି ABC ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r = 2 ସେ.ମି. ହୁଏ ତେବେ AC = AO + OC = 4 ସେ.ମି. ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ବ୍ୟାସ 2r ଏକକ ହେବ ।** ଫଳରେ ବୃତ୍ତର 'ଏକ ବ୍ୟାସ' ହେଉଛି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏବଂ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି କେନ୍ଦ୍ର । ମାତ୍ର 'ବ୍ୟାସ' ହେଉଛି ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.1ରେ A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରି ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବ ଯେ $\overline{AC}$ ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ଅର୍ଥାତ୍ **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଉଛି ଏହାର ଦୀର୍ଘତମ ଜ୍ୟା ।**

ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ :

ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସମତଳଟି ତିନୋଟି ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । ଯଥା :



(ଚିତ୍ର 2.3)

(i) **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ** : ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବୃତ୍ତର ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବୃତ୍ତର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior Points)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଥିବା ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଉକ୍ତ ସମତଳସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଲାଗି ଯଦି OP < r ହୁଏ ତେବେ P ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । ଚିତ୍ର 2.3 ରେ P ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରକୁ ବୃତ୍ତର **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ (Interior)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) **ବହିର୍ଦେଶ –** ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବୃତ୍ତର ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବୃତ୍ତର **ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Exterior points)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଯଦି ବୃତ୍ତର ସମତଳସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ Q ଲାଗି $OQ > r$ ହୁଏ ତେବେ Q ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.3ରେ Q ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରକୁ ବୃତ୍ତର **ବହିର୍ଦ୍ଦେଶ (exterior)** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, ବୃତ୍ତ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ବ୍ୟତୀତ ସମତଳର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

(iii) **ବୃତ୍ତ** ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ।

ଚିତ୍ର 2.3ରେ ଚିତ୍ରିତ ଅଂଶଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ । $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତ ଦ୍ୱୟ ବ୍ୟତୀତ ଜ୍ୟାର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପ୍ରମେୟ - 2.1, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2ର ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅନୁଚ୍ଛେଦ ଦେଖ) ।

ମନ୍ତବ୍ୟ – ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ଏକ **ଉତ୍ତଳ** ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ସଂଜ୍ଞା : 1. **ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ :** ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ **ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ (Congruent Circles)** କୁହାଯାଏ ।

2. **ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା :** ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବା ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତରେ ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ସେମାନଙ୍କୁ **ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (Congruent Chords)** କୁହାଯାଏ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଥିବା ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

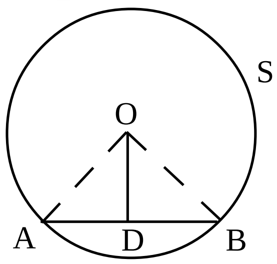
2.2 ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ :

ଉପପାଦ୍ୟ – 7

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରୁ ଏହାର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

[The perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord, other than a diameter, bisects the chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{OD}$ ।



(ଚିତ୍ର 2.4)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AD = DB$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର ।

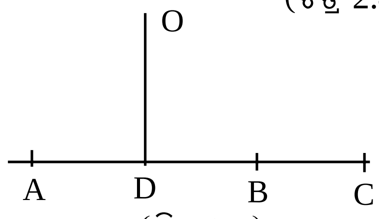
ପ୍ରମାଣ : Δ OAD ଏବଂ Δ OBD ମଧ୍ୟରେ

$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)}, \quad \overline{OD} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।} \\ \angle ODA \cong \angle ODB \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ସମକୋଣ)} \end{array} \right.$

$\therefore \Delta OAD \cong \Delta OBD$ (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ – ବାହୁ)

$\therefore AD = DB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି ସମ୍ଭବ ହୁଏ ତେବେ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ A,B ଓ C ରେ ଛେଦ କରୁ । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{OD}$, $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟ - 7ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ AD = DB ଏବଂ AD = DC । ସୁତରାଂ DB = DC । ମାତ୍ର D-B-C ହେତୁ ଏହା ଅସମ୍ଭବ । ସୁତରାଂ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ ।

(ସୂଚନା : ଏଠାରେ ଆମେ ପ୍ରାମାଣ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିକୁ ଆଧାର କରି ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ଏକ ଅସମ୍ଭବ ପରିସ୍ଥିତିରେ ପହଞ୍ଚିଲେ; ଯାହା ପ୍ରାମାଣ୍ୟର ସତ୍ୟତାକୁ ପ୍ରମାଣ କରୁଛି । ଏହି ପ୍ରକାର ପ୍ରମାଣକୁ ଗଣିତରେ **ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction)** କୁହାଯାଏ ।

ପ୍ରମେୟ 2.1 (ଉପପାଦ୍ୟ -7 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

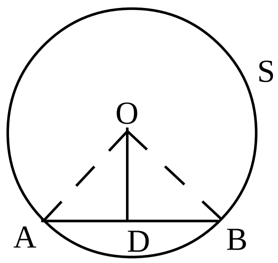
କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ କେନ୍ଦ୍ରକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ ।

[The line joining the centre of a circle to the midpoint of a chord, other than a diameter, is perpendicular to the chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ପ୍ରମାଣ : Δ OAD ଏବଂ Δ OBD ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} OA = OB \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ AD = DB \text{ (} \because D, \overline{AB} \text{ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ), } \overline{OD} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।} \end{cases}$

$\therefore \Delta ADO \cong \Delta BDO$ (ବାହୁ- ବାହୁ - ବାହୁ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO$

କିନ୍ତୁ $m\angle ADO + m\angle BDO = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । କାରଣ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଠାରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 :

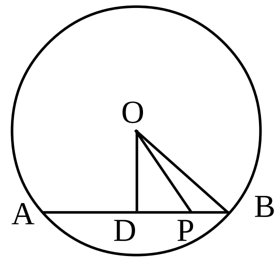
(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି । କାରଣ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁଯାୟୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ (କାହିଁକି ?) ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ଯେ $\overline{AB}$ ଏକ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାଟିର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.7ରେ P, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ ହେଲେ $OP^2 = OD^2 + DP^2 \Rightarrow OP^2 < OD^2 + DB^2 \Rightarrow OP^2 < OB^2$ ।

ସୁତରାଂ OP < ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ଅର୍ଥାତ୍ P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । (ଚିତ୍ରରେ D-P-B ନିଆଯାଇଛି ।

ଯଦି P-D-B ହୁଏ ତେବେ ମଧ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ ।)



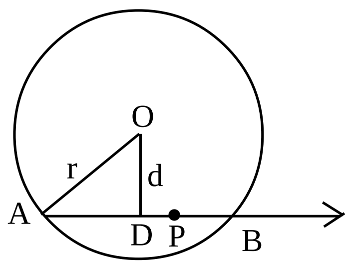
(ଚିତ୍ର 2.7)

ଯଦି A ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଓ P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ ତେବେ $\overrightarrow{AP}$ ବୃତ୍ତକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଏହା ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ମନେ ହେଉଥିଲେ ହେଁ ଏହାର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କିପରି କରାଯାଇପାରେ ଦେଖିବା । ଚିତ୍ର 2.8ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ।

P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ, $\overline{OD} \perp \overrightarrow{AP}$ ଏବଂ OD = d ହେଉ ।

ତେଣୁ $d \le OP < r$ ହେବ । ସୁତରାଂ $\sqrt{r^2 - d^2}$ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । $\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ B ଅଛି ଯେପରିକି D-P-B (କିମ୍ବା P-D-B) ଏବଂ DB = $\sqrt{r^2 - d^2}$ ।

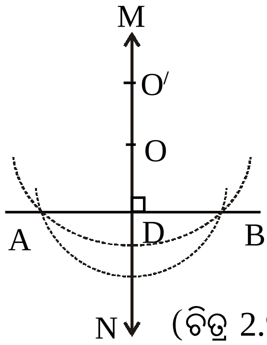
ବର୍ତ୍ତମାନ OB = $\sqrt{OD^2 + DB^2} = r \Rightarrow$ B ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 2.8)

ଆମେ ଜାଣୁ, ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଆମେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅତି କମ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଆବଶ୍ୟକ ଜାଣିବା ।

ଚିତ୍ର 2.9 ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖା D ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ ।



(ଚିତ୍ର 2.9)

ପ୍ରମେୟ 2.1 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁସାରେ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O, A ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା (ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଥିବା) କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ । ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ହେବ ଏବଂ OA = OB = ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ବୃତ୍ତ ରହିଛି । ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରମେୟରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନିମ୍ନ ଆଲୋଚନାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

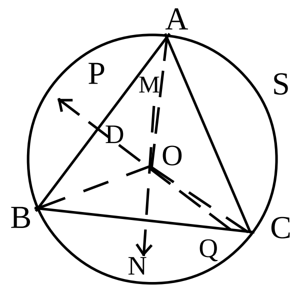
ପ୍ରମେୟ 2.2 : ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

[There is one and only one circle that passes through three non-collinear points.]

ଦତ୍ତ : A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର । $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ । A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବାରୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ଏବଂ ସେହି ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଉ । $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.10)

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ O ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ତେଣୁ OA = OB । ସେହିପରି OB = OC ସୁତରାଂ OA = OB = OC ।

ବର୍ତ୍ତମାନ O ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି OA ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ S ଅଙ୍କନ କଲେ B ଓ C ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ S ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏହିପରି ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ। ମନେକର ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ S' ରହିଅଛି । ଯାହା ଉପରେ A, B ଓ C ଅବସ୍ଥିତ । O' ଏହି ବୃତ୍ତ S' ର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $O'A = O'B \Rightarrow O'$, $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ସେହିପରି $O'B = O'C$ $\Rightarrow O'$, $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଅର୍ଥାତ୍ O ଏବଂ O' $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟର ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ, କାରଣ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି । ସୁତରାଂ O ଏବଂ O' ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ଅତଏବ $OA = O'A$ ତେଣୁ S ଓ S' ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । (ପ୍ରମାଣିତ)

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ (Circum-Circle) ଓ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର (Circum-Centre) କୁହାଯାଏ ।

ଚାରି ବା ତତୋଧିକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ହୋଇ ନ ପାରେ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଯଦି କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନେ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହନ୍ତି ତେବେ ସେହି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜକୁ **ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ (inscribed in a circle)** ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରମେୟ - 2.2 ଅନୁଯାୟୀ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୁଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।

ଯଦି ଏକ ତୃତୀୟ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ତେବେ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ । ପ୍ରମେୟ - 2.2 ଅନୁଯାୟୀ ଏହା ଅସମ୍ଭବ ।

ପ୍ରଶ୍ନ : ଏକ ସରଳରେଖାର ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ କି ? (ସୂଚନା : ଯଦି ସମ୍ଭବ ତେବେ ସେପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳରେଖାଟି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଉପପାଦ୍ୟ - 7ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ଏହା ବିରୋଧ କରେ ।)

ଉପପାଦ୍ୟ - 8

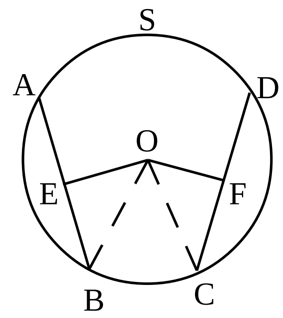
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

[Chords of equal length in a circle are equidistant from the centre.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ AB = CD । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (ଚିତ୍ର 2.11)

$\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OE = OF ।



(ଚିତ୍ର 2.11)

ଅଙ୍କନ : $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$,

$\overline{OE}$, $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ । (ଉପପାଦ୍ୟ - 7)

ସୁତରାଂ $AE = EB \Rightarrow EB = \frac{1}{2} AB$

ଯେହେତୁ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ପୂର୍ବପରି ଆମେ ପାଇବା $CF = \frac{1}{2} CD$ ।

କିନ୍ତୁ AB = CD (ଦତ୍ତ) $\therefore EB = CF$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ Δ OEB ଏବଂ Δ OFC ମଧ୍ୟରେ EB = CF (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ),

OB = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ଏବଂ $m\angle OEB = m\angle OFC$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)

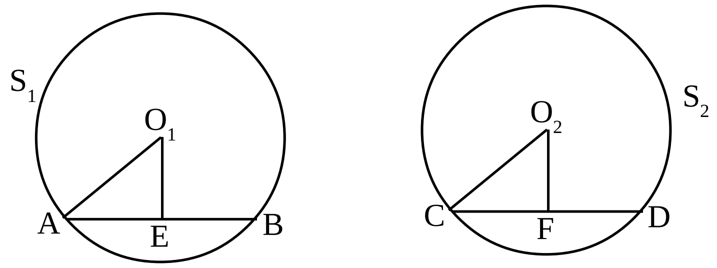
$\therefore \Delta OEB \cong \Delta OFC$ (ସମକୋଣ - ବାହୁ - କର୍ଣ୍ଣ)

$\Rightarrow OE = OF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ -8, ଦୁଇଟି (ବା ତତୋଧିକ) ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାକୁ ମୂଳ ଉପପାଦ୍ୟ-8ର ପ୍ରମାଣର ଧାରାରେ ସ୍ଥଳ ବିଶେଷରେ ସାମାନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଦେଖିବା ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ଉପପାଦ୍ୟ / ପ୍ରମେୟ ଯାହା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉଲ୍ଲେଖ କରାଯାଇଛି ସେଗୁଡ଼ିକ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇନାହିଁ । ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣର ଧାରାରେ ହେବ । କେବଳ ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 8ର ଅନୁରୂପ କଥନ ଏବଂ ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

କଥନ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

ଦତ୍ତ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 (ଚିତ୍ର 2.12) ।



(ଚିତ୍ର 2.12)

$\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଯଥାକ୍ରମେ S_1 ଓ S_2 ର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ $AB = CD$ ।

$\overline{O_1E} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{O_2F} \perp \overline{CD}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $O_1E = O_2F$

ଅଙ୍କନ : $\overline{O_1A}$ ଏବଂ $\overline{O_2C}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $\overline{O_1E} \perp \overline{AB}$ ତେଣୁ $\overline{O_1E}$, $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $AE = EB \Rightarrow AE = \frac{1}{2} AB$

ଯେହେତୁ $\overline{O_2F} \perp \overline{CD}$ ତେଣୁ ପୂର୍ବପରି ଆମେ ପାଇବା $CF = \frac{1}{2} CD$

କିନ୍ତୁ $AB = CD$ (ଦତ୍ତ) । $\therefore AE = CF$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\Delta\, O_1EA$ ଏବଂ $\Delta\, O_2FC$ ମଧ୍ୟରେ

$\because \left\{ \begin{array}{l} AE = CF \text{ (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)} \\ O_1A = O_2C \text{ (ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ m\angle O_1EA = m\angle O_2FC \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)} \end{array} \right.$

$\therefore \Delta O_1EA \cong \Delta\, O_2FC \Rightarrow O_1E = O_2F$ (ପ୍ରମାଣିତ)

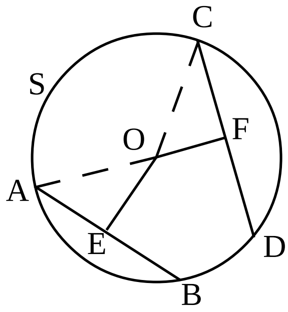
ପ୍ରମେୟ - 2.3 : ଉପପାଦ୍ୟ - 8ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

[Chords of a circle equidistant from the centre are of equal length.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ।

$\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । OE = OF



(ଚିତ୍ର 2.13)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ AEO ଏବଂ Δ CFO ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} OE = OF \text{ (ଦତ୍ତ)} \\ OA = OC \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ m\angle OEA = m\angle OFC \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)।} \end{cases}$

$\therefore \Delta$ AEO $\cong \Delta$ CFO (ସମକୋଣ - କର୍ଣ୍ଣ - ବାହୁ) $\Rightarrow$ AE = CF .... (1)

$\because$ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE}$, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ (ଉପପାଦ୍ୟ - 7)

$\Rightarrow$ AE = EB $\Rightarrow$ AB = 2AE

ସେହିପରି $\overline{OF} \perp \overline{CD} \Rightarrow$ CF = FD $\Rightarrow$ CD = 2CF

କିନ୍ତୁ AE = CF (1 ରୁ) ସୁତରାଂ AB = 2AE = 2CF = CD (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ - 2.3 ର କଥନ :

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟା ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

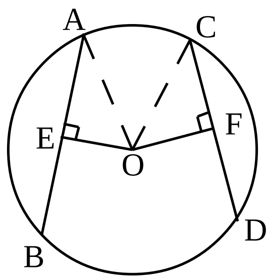
ଏହାର ପ୍ରମାଣ ମୂଳ ପ୍ରମେୟ - 2.3 ର ଅନୁରୂପ । ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିକଟତର ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ।

[Of any two chords of a circle the length of the one farther from the centre is smaller than the length of the other.]

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ।

$\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ । OF > OE (ଚିତ୍ର 2.14) ।



(ଚିତ୍ର 2.14)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : CD < AB

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OEA ଏବଂ Δ OFC ଦ୍ଵୟ ସମକୋଣୀ

$OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ $OF^2 + FC^2 = OC^2$ (ପିଥାଗୋରାସ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ)

କିନ୍ତୁ OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\therefore OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2 \Rightarrow EA^2 - FC^2 = OF^2 - OE^2 > 0$ ($\because$ OF > OE (ଦତ୍ତ))

$\Rightarrow FC < EA \Rightarrow \frac{CD}{2} < \frac{AB}{2}$ [$\because \overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$]

$\Rightarrow CD < AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଜ୍ୟାଟି କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଅଧିକ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

(ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ର ବିପରୀତ)

[Of any two chords of a circle the smaller one is farther from the centre than the other.]

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ।

CD < AB । $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ (ଚିତ୍ର 2.14 ଦେଖ)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OF > OE

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OEA ଏବଂ Δ OFC ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$\therefore OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ $OF^2 + FC^2 = OC^2$ ....(i) (ପିଥାଗୋରାସଙ୍କ ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ)

କିନ୍ତୁ OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\therefore$ (i) ରୁ $OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2 \Rightarrow OF^2 - OE^2 = EA^2 - FC^2$

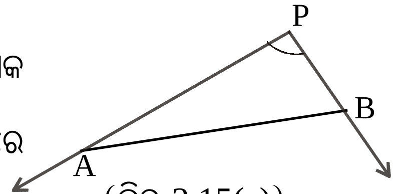
$$\Rightarrow OF^2 - OE^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2 \quad (\because \overline{OE} \perp \overline{AB} \text{ ଏବଂ } \overline{OF} \perp \overline{CD})$$

$$\Rightarrow OF^2 - OE^2 = \frac{1}{4}(AB^2 - CD^2) > 0 \ (\because AB > CD \text{ ଦତ୍ତ})$$

$\Rightarrow OF > OE$ (ପ୍ରମାଣିତ)

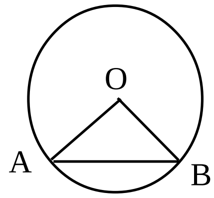
ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - **2** ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

2.3 ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by the chord at the centre):



(ଚିତ୍ର 2.15(a))

$\overline{AB}$ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ । P, $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ନ ଥିବା ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ $\angle APB$ କୁ $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା P ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by $\overline{AB}$ at P) କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର 2.15(a)) ।



(ଚିତ୍ର 2.15(b))

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଅଥବା $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.15(b) ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ ।

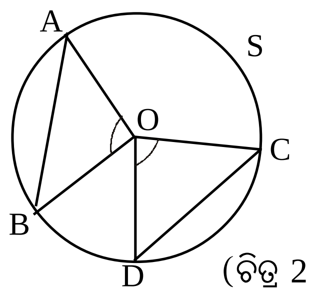
$\angle AOB$, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏକ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ । କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଶଦ ଆଲୋଚନା ପରେ ହେବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 9

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ ।

[In a circle the angles subtended by two congruent chords at the centre are congruent.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.16) । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle AOB$ ଏବଂ $\angle COD$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.16)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle AOB \cong \angle COD$

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\left\{\begin{array}{l} OA = OC, OB = OD \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ AB = CD \text{ (ଦତ୍ତ)} \end{array}\right.$

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ) $\Rightarrow \angle AOB \cong \angle COD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 9 ର କଥନ : **ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ ।** ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ପ୍ରମେୟ - 2.4 : ଉପପାଦ୍ୟ - 9 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ ।

(In a circle the chords subtending congruent angles at the centre are congruent.)

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା । $\angle AOB \cong \angle COD$ (ଚିତ୍ର 2.16)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ OA = OC, OB = OD (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ଏବଂ $m\angle AOB = m\angle COD$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore$ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ)

$\Rightarrow$ AB = CD (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ - 2.4 ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଏହାର କଥନ:

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ଉକ୍ତିଟି ଠିକ୍ ଥିଲେ T ଏବଂ ଭୁଲ ଥିଲେ F ଲେଖ ।

i) ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ବକ୍ରରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଉକ୍ତ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥିଲେ ବକ୍ରରେଖାଟିକୁ ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ ।

ii) ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

iii) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅସଂଖ୍ୟ ବ୍ୟାସ ରହିଛି ।

iv) କେନ୍ଦ୍ର, ବୃତ୍ତର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଯାହା ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

v) ଏକ ଜ୍ୟା ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ସେମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି ।

vi) ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି ।

vii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

viii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, ଏହାର ଏକମାତ୍ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଯାହାଠାରୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ସମାନ ।

ix) ଏକ ରଶ୍ମୀ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ତେବେ ରଶ୍ମୀର ଆଦ୍ୟ ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

x) ଏକ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ହେଲେ B ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, $\angle ABC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(xi) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

(xii) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ ସର୍ବଦା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

2. ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

i) ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଛେଦବିନ୍ଦୁ .... ଅଟେ ।

a) ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ b) ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ
c) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ d) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ

ii) P ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ P ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ .... ଯୋଡ଼ା ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

a) 1 b) 2 c) 8 d) ଅସଂଖ୍ୟ

iii) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବାଧିକ .... ଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହୋଇ ପାରିବ ।

a) 1 b) 2 c) 4 d) ଅସଂଖ୍ୟ

iv) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବାଧିକ .... ଟି ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ହୋଇପାରିବ ।

a) 1 b) 2 c) 4 d) ଅସଂଖ୍ୟ

v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 5 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଏବଂ ଜ୍ୟାଟିର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 3 ସେ.ମି ଦୂରରେ ଅଛି । ଜ୍ୟାଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ .... ସେ.ମି. ।

a) 8 b) 12 c) 16 d) 20

(ଖ - ବିଭାଗ)

3. ଏକ ବୃତ୍ତର 16 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ଦ୍ୱାରା D ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 10 ସେମି. ହେଲେ $\overline{DP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OD}$, $\angle AOB$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

5. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏହାର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OA}$, $\angle BAC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

6. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା । P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ O ବିନ୍ଦୁ, $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ ।

7. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନେ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ - ପ୍ରମାଣ କର ।

8. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବ୍ୟାସ ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ଜ୍ୟା । (ସୂଚନା : ଏକ ଜ୍ୟାର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା $d \geq 0$ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ହେଲେ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $2\sqrt{r^2 - d^2} \leq 2r$ = ବ୍ୟାସ) ।

9. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି ।

10. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା । AB = CD = 8 ସେମି. । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ସେମି. ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଗ - ବିଭାଗ)

11. 10 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 10 ସେମି. । $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 6 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ΔABC ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇଛି । ଯଦି AB = AC ହୁଏ ପ୍ରମାଣ ଯେ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅଟେ ।

13. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କରେ ଯେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ।

14. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ । (ସୂଚନା : ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction) ବ୍ୟବହାର କର)

15. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$, B ଠାରେ 90^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ A, O ଏବଂ C ଏକ ଏକରେଖୀୟ ।

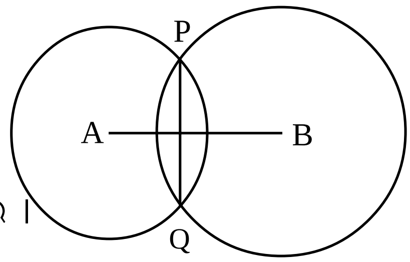
16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଟେ ।

17. $\overline{PQ}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା । P ଓ Q ଠାରେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ R ଓ S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PQSR ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ।

18. ଚିତ୍ର 2.17ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ P ଓ Q ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PQ}$ ସାଧାରଣ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

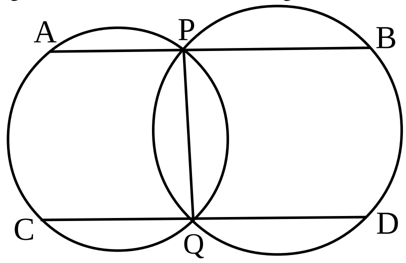
.. ଏବଂ (ii) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{PQ}$



(ଚିତ୍ର 2.17)

(ସୂଚନା : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{PQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେଲେ ΔACP ଓ ΔACQ ଏବଂ ΔAPB ଓ ΔAQB ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର)

19. ଚିତ୍ର 2.18ରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ଠାରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ A ଓ B ଠାରେ ଛେଦ କରେ ଓ ସେହିପରି Q ଠାରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ C ଓ D ଠାରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AB = CD

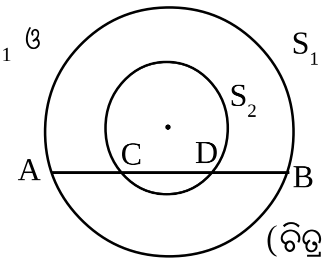


(ଚିତ୍ର 2.18)

20. A ଓ B କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overline{AB}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, MN = 2AB । (ସୂଚନା : $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$, $\overline{MN}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = CD)

21. ଚିତ୍ର 2.19 ରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ଏକ କେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, C, D ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AC = DB ।



(ଚିତ୍ର 2.19)

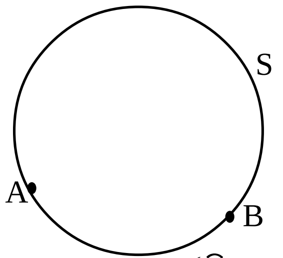
22. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D । ଯଦି AB = CD ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PA = PC ଏବଂ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

23. ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏହାର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ଓ C, $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) PA = PC ଏବଂ (ii) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

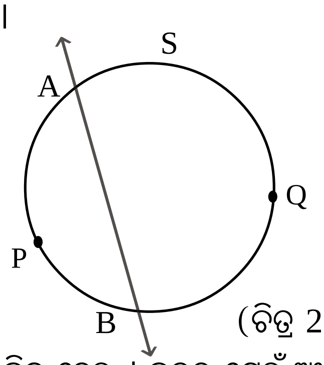
(ସୂଚନା : $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କରି O, P ଯୋଗ କର)

2.4 ଚାପ (Arc) :

ଚିତ୍ର 2.20ରେ S ଏକ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବୃତ୍ତଟି A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଚାପ କହିବା । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାର କହିଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ସହିତ “A ଠାରୁ B ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ'' ବୃତ୍ତର ଏକ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଂଶ ହେଉଛି ଏକ ଚାପ । ଚିତ୍ର 2.21ରେ $\overleftrightarrow{AB}$, S ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ (Secant) ।



(ଚିତ୍ର 2.20)



(ଚିତ୍ର 2.21)

P, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ଅଂଶରେ P ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ସେହି ଅଂଶଟିକୁ APB ଅଥବା BPA ଚାପ କୁହାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଚାପର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନମତେ କରିବା।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଚାପ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସେଟ୍ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଚାପକୁ APB କିମ୍ବା BPA ଚାପ ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ଚାପକୁ $\overparen{APB}$ କିମ୍ବା $\overparen{BPA}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

$\overparen{APB}$ ଏକ ଚାପ ହେଲେ A ଓ B, ଚାପର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (End points) ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଚାପର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁଙ୍କୁ ଚାପର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior points) କୁହାଯାଏ । Q, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ (ଚିତ୍ର 2.21) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ AQB ଚାପକୁ $\overparen{AQB}$ ବା $\overparen{BQA}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

A ଓ B ଉଭୟ $\overparen{APB}$ ଏବଂ $\overparen{AQB}$ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି । $\overparen{APB}$ ଓ $\overparen{AQB}$ ଚାପଦ୍ୱୟକୁ ପରସ୍ପରର **ବିପରୀତ ଚାପ (Opposite arc)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଚାପ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବୃତ୍ତଟି ଗଠିତ ହେଉଥିବାରୁ ଗୋଟିକୁ ଅପରର **ପରିପୂରକ ଚାପ (Supplementary arc)** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଏହି ଚାପଦ୍ୱୟକୁ $\overline{AB}$ **ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବା ଛେଦିତ** ଚାପ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ଉଭୟ **ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (Corresponding chord)** କୁହାଯାଏ ।

2.4.1 କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ ଏବଂ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Minor arc, Major arc and semi circle) :

କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ :

ଯଦି କୌଣସି ଚାପ $\overparen{APB}$ ର P ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $\overparen{APB}$ କୁ ଏକ **କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (Minor arc)** କୁହାଯାଏ । ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ବିପରୀତ ଚାପକୁ **ବୃହତ୍‌ଚାପ (Major arc)** କୁହାଯାଏ ।

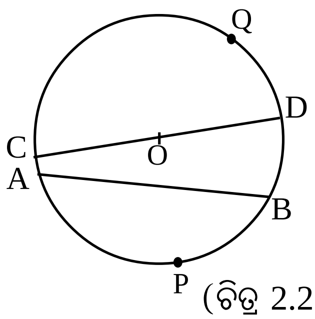
ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\overparen{APB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ $\overparen{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପ ଅଟନ୍ତି । $\overparen{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେଲେ ଏହାକୁ 'AB କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ' ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ଓ ସେହିପରି $\overparen{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପକୁ "AB ବୃହତ୍ ଚାପ" ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ :

ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଲେ ଚାପଟିକୁ ଏକ **ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Semi circle)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\overparen{CQD}$ ଏବଂ $\overparen{CPD}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଅଟନ୍ତି । ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ବା ବୃହତ୍ ଚାପ ନୁହେଁ । ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ବିପରୀତ ଚାପ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

2.4.1 ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (Length of the arc) :

ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ରହିଅଛି ସେହିପରି ବୃତ୍ତରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ରହିଅଛି । ଏହାର ମାପ ପ୍ରଣାଳୀ ପରିମିତିରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ । ତେବେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର । ଚାପର **ଦୈର୍ଘ୍ୟ (length)କୁ** ℓ ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $\ell\,\overparen{APQ}$, $\overparen{APQ}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟମାପକୁ ସୂଚାଏ । ଦୁଇ ବିପରୀତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଟେ । ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବୃତ୍ତର **ପରିଧି (Circumference)** କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 2.22)

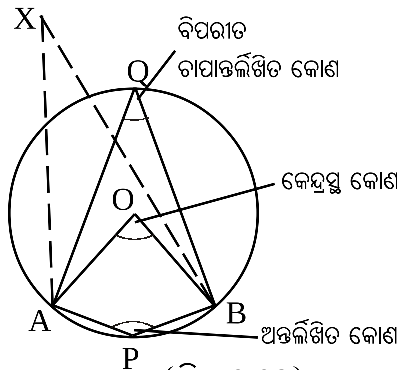
ସନ୍ନିହିତ ଚାପ (Adjacent arcs):

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ଏବଂ ଏହିପରି ଦୁଇଟି ଚାପକୁ **ସନ୍ନିହିତ ଚାପ (Adjacent arcs)** କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ନୂତନ ଚାପ ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\overparen{QCA}$ ଏବଂ $\overparen{APB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ $\overparen{QAB}$ ଗଠିତ ହେଉଅଛି ।

ମନେରଖ : ଦୁଇଟି ବୃହତ୍ ଚାପ କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହୋଇପାରିବେ ନାହିଁ ।

2.5 ଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by an arc):

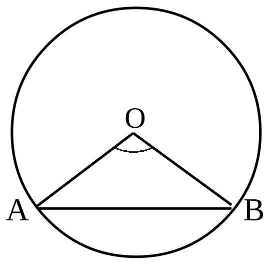
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଚିତ୍ର 2.23) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ । X, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ନ ଥିବା ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AXB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପ ଦ୍ୱାରା X ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (angle subtended at X) କୁହାଯାଏ । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ବା ସଂକ୍ଷେପରେ $\overset{\frown}{APB}$ ର **କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଉକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ।**



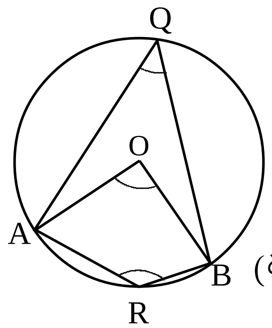
(ଚିତ୍ର 2.23)

$\overset{\frown}{AB}$ ର P ଯେକୌଣସି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle APB$ କୁ $\overset{\frown}{AB}$ ଚାପର ଏକ **ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Inscribed angle)** କୁହାଯାଏ । Q, $\overset{\frown}{APB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AQB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପର **ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ** ବା **ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Angle subtended at a point on the opposite arc or supplementary arc)** କୁହାଯାଏ । (ଚିତ୍ର 2.23 ଦେଖ)

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛେ, $\angle AOB$ ଟି $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ $\overset{\frown}{AB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ (ଚିତ୍ର 2.24 ଦେଖ) । ଚିତ୍ର 2.25ରେ $\overset{\frown}{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ।



(ଚିତ୍ର 2.24)

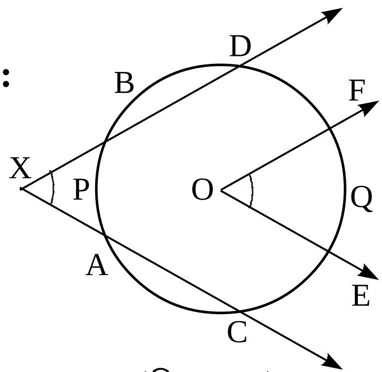


(ଚିତ୍ର 2.25)

$\overset{\frown}{ARB}$ ଦ୍ୱାରା Q ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle AQB$, $\overset{\frown}{AQB}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\angle ARB$, $\overset{\frown}{AQB}$ ର ଏକ ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

2.5.1 କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ (Arc intercepted by the angle) :

ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କଲେ, କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା ଚାପ, ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ଉପରିସ୍ଥ ହୁଅନ୍ତି, ତାହାକୁ **ଉକ୍ତ କୋଣଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ କୁହାଯାଏ ।** ଚିତ୍ର 2.26ରେ $\angle EOF$ କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ ହେଉଛି $\overset{\frown}{EQF}$ ଏବଂ $\angle AXB$ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\overset{\frown}{APB}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{CQD}$ ।



(ଚିତ୍ର 2.26)

2.6 ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ (Degree measure of an arc):

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଏକ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ । କୋଣ ମାପ ପାଇଁ ତିନି ପ୍ରକାର ପରିମାପ; ଯଥା: ଡିଗ୍ରୀ, ରେଡ଼ିଆନ ଓ ଗ୍ରେଡ୍ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ତଦନୁଯାୟୀ ଚାପର ତିନି ପ୍ରକାରର ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇପାରିବ । ନିମ୍ନରେ ଯେକୌଣସି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇଛି ।

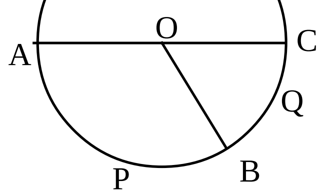
ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 0 ଓ 360 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $m\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ଏବଂ ନିମ୍ନମତେ ସ୍ଥିରୀକୃତ ହୁଏ :

O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ,

(i) $m\overset{\frown}{APB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ = $m\angle AOB$

(ii) $m\overset{\frown}{APB}$ ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତ = 180^0

(iii) $m\overset{\frown}{APB}$ ବୃହତ୍‌ଚାପ = $360^0 - m\angle AOB$



(ଚିତ୍ର 2.27)

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ **ଏକ ଚାପ ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।**

ଚିତ୍ର 2.27ରେ $\overline{AC}$ ବ୍ୟାସ ଓ $m\angle AOB = 120^0$ ହେଲେ $m\overset{\frown}{APB} = 120^0$, $m\overset{\frown}{APC} = 180^0$, $m\overset{\frown}{BQC} = 60^0$ ଏବଂ $m\overset{\frown}{ACB} = 360^0 - 120^0 = 240^0$ ହେବ ।

(**ସୂଚନା:** ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ପରି ଏହାର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପ 0 ଓ 2π ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଗ୍ରେଡ଼ ପରିମାପ 0 ଓ 400 ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ । ଏହାର ଆଲୋଚନା ପରିମିତିରେ କରାଯିବ । ଏଠାରେ କେବଳ ଏତିକି କୁହାଯାଇପାରେ ଯେ **ଗୋଟିଏ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଚାପଟିର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ 1^C ଅଟେ ଏବଂ ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ $\frac{180}{\pi}$ ଅଟେ ।** ସାଧାରଣ ଭାବେ ଯେକୌଣସି ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ $\frac{l\,\overset{\frown}{APB}}{\text{ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ}}$)

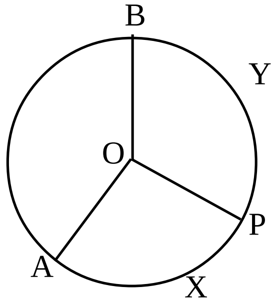
ଚିତ୍ର 2.28ରେ $\overset{\frown}{AXP}$ ଓ $\overset{\frown}{PYB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ଏବଂ P ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ । ଉକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ $\overset{\frown}{APB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $m\overset{\frown}{APB} = m\overset{\frown}{AXP} + m\overset{\frown}{PYB}$

ସେହିପରି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବିଚାରକୁ ନେଲେ ଆମେ ପାଇବା

$l\,\overset{\frown}{APB} = l\,\overset{\frown}{AXP} + l\,\overset{\frown}{PYB}$

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଆମର ଆଲୋଚନା ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।



(ଚିତ୍ର 2.28)

2.6.1 ଚାପର ସର୍ବସମତା (Congruence of arcs) :

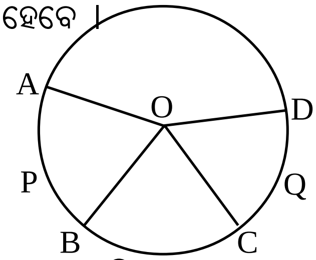
ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଅଥବା ଦୁଇ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ ହେଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ (Congruent) ହୁଅନ୍ତି ।

ଚିତ୍ର 2.29ରେ $m\angle AOB = m\angle COD \Leftrightarrow \widehat{APB} \cong \widehat{CQD}$ ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ବୃହତ୍ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ।



(ଚିତ୍ର 2.29)

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସର୍ବସମ ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ (i) ରୁ (iii) ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାପ ସହ ସମାନୁପାତୀ । କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି ସହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିକ ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 10

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

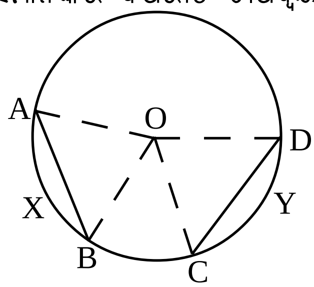
(Corresponding chords of two congruent arcs in a circle are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଚାପଦ୍ୱୟର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.30) ।

(ଯଦି $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃହତ୍ ଚାପ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେବେ । ସୁତରାଂ କେବଳ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.30)

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} OA = OC, OB = OD \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ m\angle AOB = m\angle COD \text{ (}\because \widehat{AXB} \cong \widehat{CYD} \text{ ହେତୁ ସେମାନଙ୍କର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ)} \end{cases}$

ଅତଏବ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ - କୋଣ - ବାହୁ ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ - 1 : ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ -10 ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ କାରଣ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଏକା ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ ଅଟନ୍ତି ।

2. ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।** ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉପପାଦ୍ୟ-10 ର ପ୍ରମାଣର ଅନୁରୂପ ହେବ ।

ପ୍ରମେୟ - 2.5 : ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ (i) କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) ବୃହତ୍ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

[If two chords of a circle are congruent, then the corresponding (i) minor arcs are congruent and (ii) major arcs are congruent.]

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା । $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଏବଂ $\overset{\frown}{AYB}$ ଓ $\overset{\frown}{CXD}$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃହତ୍ ଚାପ । (ଚିତ୍ର 2.31)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ଏବଂ (ii) $\overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} OA = OC, OB = OD \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ AB = CD \text{ (}\because \overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ ଦତ୍ତ)} \end{cases}$

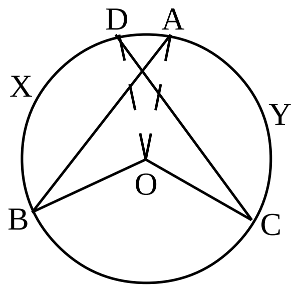
$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ - ବାହୁ - ବାହୁ ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle COD$ ....(1)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ((i) ପ୍ରମାଣିତ)

ପୁନଶ୍ଚ (1) ରୁ $360^0 - m\angle AOB = 360^0 - m\angle COD$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ ((ii) ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.31)

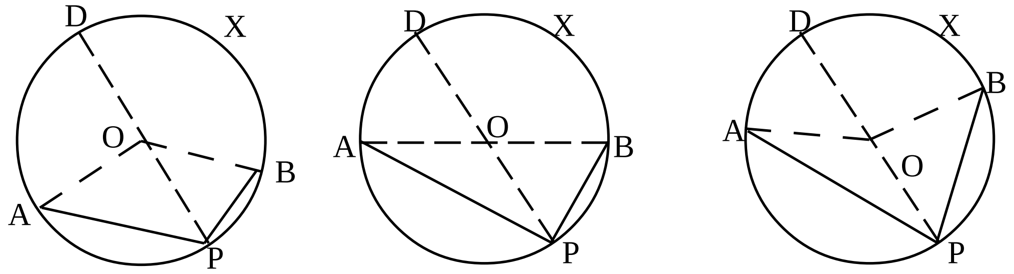
ମନ୍ତବ୍ୟ : ପ୍ରମେୟ - 2.5, ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଲେଖି ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

2.6. 2 ଗୋଟିଏ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ :

ପ୍ରମେୟ - 2.6 : ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

[In a circle, the measure of an inscribed angle of an arc is half the degree measure of the opposite arc.]

ଦତ୍ତ : APB ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର । $\angle APB$, $\widehat{APB}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\widehat{AXB}$, $\widehat{APB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32) ।



(a) (b) (c)

(ଚିତ୍ର 2.32)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle APB = \frac{1}{2} m\,\widehat{AXB}$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଏଠାରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଅଛି । ସମ୍ଭାବନାତ୍ରୟ ହେଲେ -

(i) $\widehat{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32 (a)),

(ii) $\widehat{APB}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (ଚିତ୍ର 2.32 (b)) ଏବଂ

(iii) $\widehat{APB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32 (c))

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର 2.32 (a), (b) ଓ (c) ନିମନ୍ତେ Δ OAP ରେ

AO = PO (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) $\Rightarrow m\angle OAP = m\angle OPA$ ... (1)

$\angle AOD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $\Rightarrow m\angle AOD = m\angle OAP + m\angle OPA$ (ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ)

$m\angle AOD = 2m\angle OPA$ ((1) ଦ୍ୱାରା) .....(2)

ସେହିପରି ΔOPB ରୁ ପାଇବା $m\angle BOD = 2m\angle OPB$ ..... (3)

(2) ଓ (3)ରୁ ଆମେ ପାଇବା $m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle OPA + 2m\angle OPB$

$\Rightarrow m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle APB$ ..... (4)

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର (c) ରେ

$2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD = m\angle AOB$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$\Rightarrow m\angle APB = \frac{1}{2} m\angle AOB = \frac{1}{2} m\,\widehat{AXB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର (b)ରେ

$2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$= 180^0$ ($\widehat{APB}$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ)

$\Rightarrow m\angle APB = \frac{180^0}{2} = \frac{1}{2} m \widehat{AXB}$ ($\because \widehat{AXB}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଶେଷରେ ଚିତ୍ର (a)ରେ $m\angle AOD = 180^0 - m\angle AOP$ ....(5)

($\because \angle AOD$ ଓ $\angle AOP$ ପରସ୍ପର ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

ସେହିପରି $m\angle BOD = 180^0 - m\angle BOP$ ....(6)

ସୁତରାଂ $2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$= 360^0 - (m\angle AOP + m\angle BOP)$ [(5) ଓ (6) ଦ୍ୱାରା]

$= 360^0 - m\angle AOB$

[$\angle AOP$ ଓ $\angle BOP$ ଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ଏବଂ P, $\angle AOB$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$= m \widehat{AXB} \Rightarrow m\angle APB = \frac{1}{2} m \widehat{AXB}$ [ପ୍ରମାଣିତ]

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଚିତ୍ର 2.32 (a)ରେ $\widehat{AXB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ $\widehat{APB}$ ର P ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle APB$ର ପରିମାଣ, $\widehat{AXB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

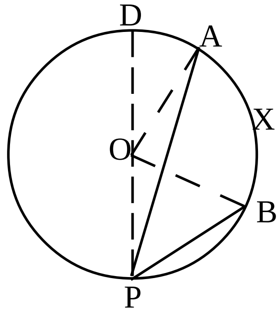
ମନ୍ତବ୍ୟ : $\widehat{APB}$ ବୃହତ୍ ଚାପ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ର 2.32 (c) ରେ O ବିନ୍ଦୁଟି $\angle APB$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଅଛି । ଯଦି ବିନ୍ଦୁଟି $\angle APB$ ର ବହିର୍ଦେଶରେ ରହେ (ଚିତ୍ର 2.33) ତେବେ ପ୍ରମାଣରେ ସାମାନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ।

ଚିତ୍ର 2.33ରେ

$2m\angle APB = 2\,(m\angle OPB - m\angle OPA)$

$= m\angle BOD - m\angle AOD$ [(2) ଓ (3) ଦ୍ୱାରା]

$= m\angle BOA = m \widehat{AXB}$ [$\because \widehat{AXB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ]

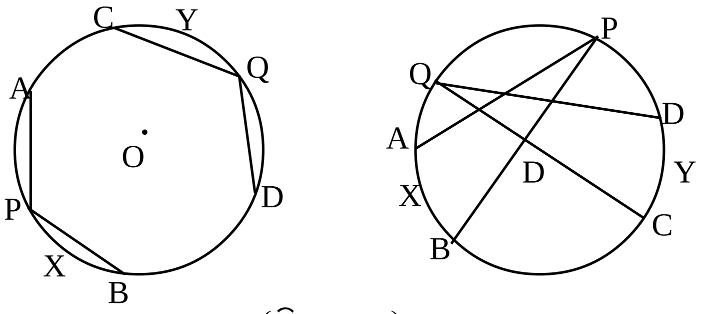


(ଚିତ୍ର 2.33)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । [ଚିତ୍ର 2.34 (a)]

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । [ଚିତ୍ର 2.34 (b)]



(a) (ଚିତ୍ର 2.34) (b)

ପ୍ରମାଣ : (i) ଚିତ୍ର 2.34 (a) ନିମନ୍ତେ :

ଦତ୍ତ : $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ । $\angle APB$ ଓ $\angle CQD$ ସେମାନଙ୍କର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle APB \cong \angle CQD$

ପ୍ରମାଣ : $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD} \Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ (ବିପରୀତ ଚାପ)

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AYB} = m\overset{\frown}{CXD}$ (ସଂଜ୍ଞା) ...... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ $m\angle APB = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AYB}$ ଏବଂ $m\angle CQD = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{CXD}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁଯାୟୀ)

ସୁତରାଂ (1) $\Rightarrow \angle APB \cong \angle CQD$

ବିପରୀତ କ୍ରମେ $\angle APB \cong \angle CQD \Rightarrow m\angle APB = m\angle CQD$

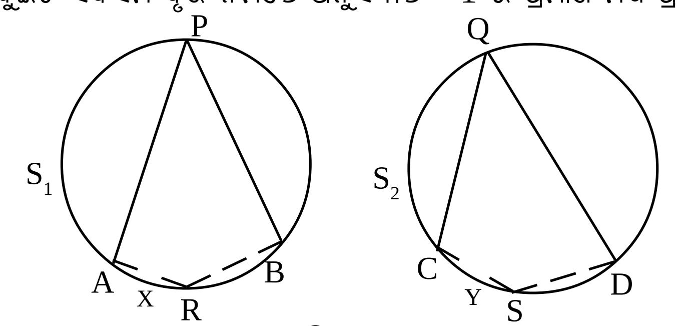
$\Rightarrow \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AYB} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{CXD}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁଯାୟୀ)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ (ସଂଜ୍ଞା) $\Rightarrow \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ (ବିପରୀତ ଚାପ) (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ଚିତ୍ର 2.34 (b) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

(**ସୂଚନା:**$\angle APB$ ଓ$\angle CQD$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଅଟନ୍ତି ।)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ର ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।



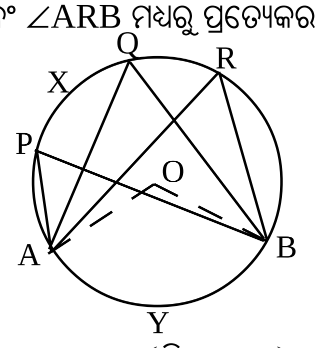
(a) (ଚିତ୍ର 2.35) (b)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ରେ $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ଓ $\angle ARB$ ଏବଂ $\angle CSD$ ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଲେ $\angle ARB \cong \angle CSD$ ହେବ । ସେହିପରି $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ $\angle APB$ ଏବଂ $\angle CQD$ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏଥିପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2: (i) **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।**

(ii) **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।**

ଚିତ୍ର 2.36ରେ $\widehat{AXB}$ ର ତିନୋଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ $\angle APB$, $\angle AQB$ ଏବଂ $\angle ARB$ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ପରିମାଣ ବିପରୀତ ଚାପ $\widehat{AYB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ (ପ୍ରମେୟ-2.6)।



(ଚିତ୍ର 2.36)

ସୁତରାଂ $m\angle APB = m\angle AQB = m\angle ARB = \frac{1}{2} m\,\widehat{AYB}$ ......(i)

$\Rightarrow$ $\widehat{AYB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।

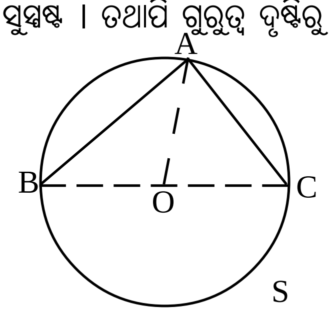
$\Rightarrow$ $\widehat{AXB}$ ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଚାପଟି ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

ପ୍ରମେୟ- 2.6ରେ ପ୍ରମାଣ ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମ୍ଭାବନା (ii) ଚିତ୍ର 2.32 (b) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ । ତଥାପି ଗୁରୁତ୍ୱ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ଓ 4 ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ର ପ୍ରମାଣ :



(ଚିତ୍ର 2.37)

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ BAC ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । (ଚିତ୍ର 2.37)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : BAC ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{BC}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ।

ΔBAO ରେ $OB = OA$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) $\Rightarrow m\angle OAB = m\angle OBA$

ସେହିପରି ΔCAO ରେ $m\angle OAC = m\angle OCA$

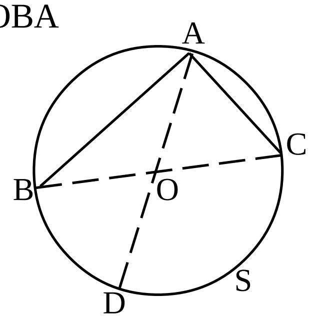
ସୁତରାଂ $m\angle OAB + m\angle OAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow 2m\angle BAC = m\angle BAC + m\angle OBA + m\angle OCA = 180^0$

[ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0]

$\Rightarrow m\angle BAC = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ । (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.38)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ: S ବୃତ୍ତରେ $\angle BAC$, $\widehat{BAC}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏବଂ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ (ଚିତ୍ର 2.38)।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\widehat{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ଏବଂ $\overline{CO}$ ଅଙ୍କନ କର । $\overrightarrow{AO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABO ରେ OB = OA (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\Rightarrow m\angle OBA = m\angle OAB$ ....(i)

$\angle BOD$, Δ ABO ର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ।

$\therefore m\angle BOD = m\angle OBA + m\angle OAB = 2m\angle OAB$ [(i)ଦ୍ୱାରା]

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle COD = 2m\angle OAC$

$\therefore m\angle BOD + m\angle COD = 2m\angle OAB + 2m\angle OAC = 2m\angle BAC = 180^0$

[$\because m\angle BAC = 90^0$ (ଦତ୍ତ)]

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}$ ଓ $\overrightarrow{OC}$ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି । ଅର୍ଥାତ B, O, C ଏକ ରେଖୀୟ ।

O କେନ୍ଦ୍ର ହେତୁ $\overline{BC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ $\Rightarrow \widehat{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

2.7 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ, ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ ବୃତ୍ତକଳା

(Segment, angle inscribed in a segment and sector) :

2.7.1 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ :

ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କୌଣସି ଏକ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.39ରେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ହେଉଛି AXBA । $\widehat{AXB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହୋଇଥିବା ଯୋଗୁଁ **AXBA ଏକ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Major Segment) ।** ସେହିପରି ଅନୁରୂପ କାରଣରୁ **AYBA ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Minor Segment) ।**

2.7.2 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ :

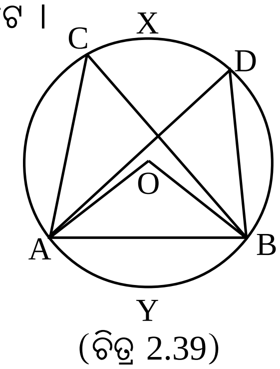
କୌଣସି ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ (Angle inscribed in a segment) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.39ରେ $\angle ACB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ ।

ସେହିପରି $\angle ADB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣ ଅଟେ ।

ପ୍ରମେୟ -2.6 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 ର ନିମ୍ନ ବିକଳ୍ପ କଥନଟି ସୁସ୍ପଷ୍ଟ :

କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ସମସ୍ତ କୋଣ ସର୍ବସମ ।

ଚିତ୍ର 2.39 ରେ $m\angle ACB = m\angle ADB$ ।



ସେହିପରି ପ୍ରମେୟ - 2.6, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ର ବିକଳ୍ପ କଥନଟି ମଧ୍ୟ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।

(ଚିତ୍ର 2.39)

ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ।

2.7.3 ବୃତ୍ତକଳା :

ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଚାପ, ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ସହିତ ଯୋଗ କରୁଥିବା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ବୃତ୍ତକଳା (Sector) ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 2.39 ରେ OAYB ଏକ ବୃତ୍ତକଳା ଅଟେ ।

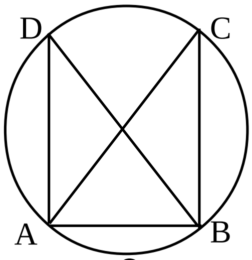
ପରିମିତିରେ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଓ ବୃତ୍ତକଳା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଶଦ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

2.8 ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic quadrilateral) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନେ ସର୍ବଦା ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ । ଅର୍ଥାତ୍ ସେହି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସର୍ବଦା ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ । କିନ୍ତୁ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ସେମାନେ ସର୍ବଦା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ କି ? ଏହା ସର୍ବଦା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ କରୁଥିଲେ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ **(Concyclic)** ହେବେ ।

ପ୍ରମେୟ - 2.7 : ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ ।

[If the angles subtended by a line segment joining two points at two other points lying on the same side of the segment are congruent, then the four points lie on a circle.]



(ଚିତ୍ର 2.40)

ଦତ୍ତ : A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ଏହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା C ଓ D ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\angle ACB$ ଓ $\angle ADB$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଅଛି ଏବଂ $\angle ACB \cong \angle ADB$ (ଚିତ୍ର 2.40) ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ।

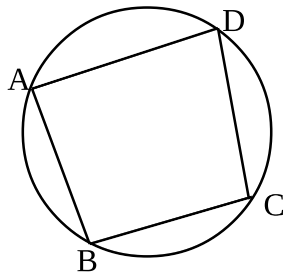
ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଥିବାରୁ ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇ ନାହିଁ । ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପରିଶିଷ୍ଟରେ ପ୍ରମେୟ 2.7 ର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥିବା ଚାରିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଓ D ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ଗଠନ କରୁଥିଲେ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରକୁ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟତ୍ର ଛେଦ କରୁ ନ ଥିଲେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ କହିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଉଥିଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟିକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic Quadrilateral) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 2.41ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ ଉପପାଦ୍ୟ- 11 ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.41)

ଉପପାଦ୍ୟ - 11

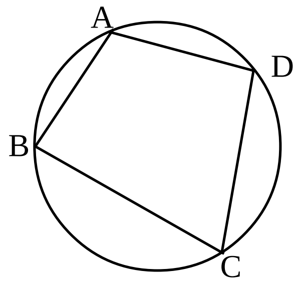
ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

[The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.]

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (ଚିତ୍ର 2.42)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି (ପ୍ରମାଣ ନିମନ୍ତେ ମନ୍ତବ୍ୟ ଦେଖ) ।



(ଚିତ୍ର 2.42)

$\therefore$ B ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\Rightarrow \widehat{ABC}$ ଓ $\widehat{ADC}$ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ଚାପ ।

ତେଣୁ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ

$m\widehat{ABC} + m\widehat{ADC} = 360^0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\widehat{ABC} + \frac{1}{2}m\widehat{ADC} = 180^0$ .... (1)

କିନ୍ତୁ $m\angle ADC = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$ ଏବଂ $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{ADC}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6)

$\Rightarrow m\angle ADC + m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{ABC} + \frac{1}{2}m\widehat{ADC} = 180^0$ ((1) ଦ୍ୱାରା)

କିନ୍ତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

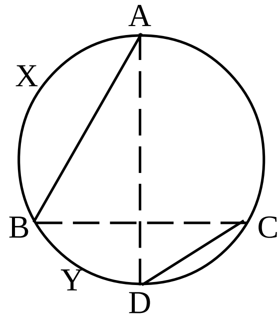
ସୁତରାଂ $m\angle BAD + m\angle BCD = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 2.43 ଦେଖ) ତେବେ B ଓ D $\overline{AC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ । ଅର୍ଥାତ୍ D, $\widehat{ABC}$ ଉପରେ ରହିବ । ମନେକର D, $\widehat{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ । A, $\widehat{ABC}$ ର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବାରୁ $\widehat{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ ।

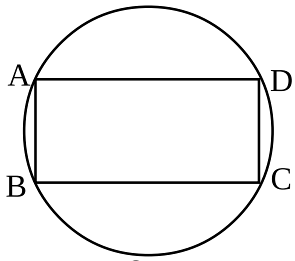
$\Rightarrow$ A ଓ D, $\overline{BC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେବେ ।

$\Rightarrow \overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ, ଯାହାକି ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଅସମ୍ଭବ । ତେଣୁ D, $\widehat{ABC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ । ସେହିପରି D, $\widehat{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ D, ABC .ଉପରେ ରହି ପାରିବ ନାହିଁ । ତେଣୁ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । (ପ୍ରମାଣିତ) ।



(ଚିତ୍ର 2.43)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 2.44)

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର (ଚିତ୍ର 2.44)

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C$ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ)

କିନ୍ତୁ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 11)

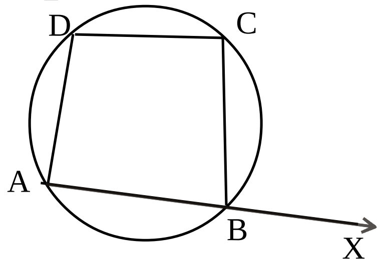
$\Rightarrow 2m\angle A = 180^0 \Rightarrow m\angle A = 90^0$

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ । $\therefore$ ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁଯାୟୀ ରମ୍ବସର ଗୋଟିଏ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3: ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିପରୀତ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ।



(ଚିତ୍ର 2.45)

ଚିତ୍ର 2.45 ରେ ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\angle CBX$ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ

$\Rightarrow m\angle ABC + m\angle CBX = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 11) $\Rightarrow m\angle CBX = m\angle ADC$

ପ୍ରମେୟ - 2.8 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 11ର ବିପରୀତ କଥନ) :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ।

[If the opposite angles of a quadrilateral are supplementary, then the quadrilateral is cyclic.]

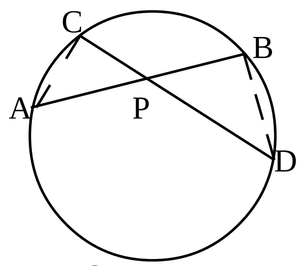
ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$ (ଚିତ୍ର 2.41)

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ।

ପ୍ରମେୟ -2.8 ର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଥିବାରୁ ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପରିଶିଷ୍ଟରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରମେୟର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ଉଦାହରଣ :

ଉଦାହରଣ : - 1 ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AP . PB = CP. PD ।



(ଚିତ୍ର 2.46)

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.46 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ PA . PB = PC .PD

ଅଙ୍କନ : $\overline{CA}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ PAC ଓ Δ PBD ମଧ୍ୟରେ

$m\angle ACP = m\angle PBD$ (ଏକା ଚାପ $\overset{\frown}{ABD}$ ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ);

$m\angle PAC = m\angle PDB$ (ଏକା ଚାପ $\overparen{BC}$ ର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ) ଏବଂ

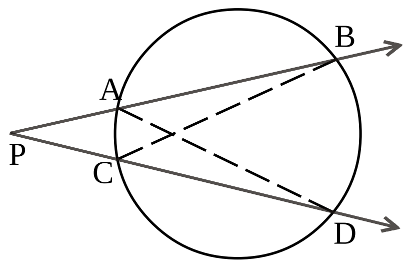
$m\angle APC = m\angle BPD$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$\Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta\ PBD$ (କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

$\Rightarrow \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow PA\ .\ PB = PC.\ PD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 2.47) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $PA\ .\ PB = PC.\ PD$ ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.47ରେ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ $\overrightarrow{PB}$ ଓ $\overrightarrow{PD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.47)

ପ୍ରମାଣ୍ୟ : ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $PA\ .\ PB = PC.\ PD$ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔPAD ଓ ΔPCB ମଧ୍ୟରେ $\angle APC$ ସାଧାରଣ ।

$m\angle ADP = m\angle CBP$ (ଏକା ଚାପ $\overparen{AC}$ ର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ)

$\Rightarrow \Delta ADP \sim \Delta\ PCB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB} \Rightarrow PA\ .\ PB = PC.\ PD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\ \overparen{BD} - m\ \overparen{AC}\ ]$

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.47 ରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ $\overrightarrow{PB}$ ଓ $\overrightarrow{PD}$ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overparen{BD} - m\overparen{AC}\ ]$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔPAD ରେ $m\angle APD = m\angle BAD - m\angle ADP$ ($\because \angle BAD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ) ....(1)

କିନ୍ତୁ $m\angle BAD = \frac{1}{2}m\overparen{BD}$ ଏବଂ $m\angle ADP = m\angle ADC = \frac{1}{2}m\overparen{AC}$

ସୁତରାଂ $m\angle APC = \frac{1}{2}\ [m\overparen{BD} - m\ \overparen{AC}\ ]$ [(1) (ରୁ)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ପରିଶିଷ୍ଟ

ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରମେୟ 2.7 ଓ 2.8 ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପ୍ରମେୟ - 2.7ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $m\angle ACB = m\angle ADB$ ।

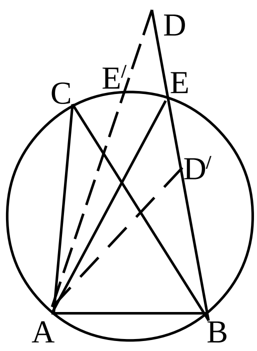
ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ ।

ଅଙ୍କନ : ଯେହେତୁ A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ABC ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ।

ପ୍ରମାଣ : ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ D ବିନ୍ଦୁଟି ABC ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବ ।

ମନେକର D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ (ଚିତ୍ର 2.48) ତେବେ $\overleftrightarrow{BD}$ କିମ୍ବା $\overleftrightarrow{AD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । (ସମତଳ ଉପରେ $\overline{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ Dର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ନେଇ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିହେବ ।)

ମନେକର $\overleftrightarrow{BD}$ ବୃତ୍ତଟିକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AE}$ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ।



(ଚିତ୍ର 2.48)

ଯେହେତୁ C ଓ E ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overparen{ACB}$ ଉପରେ ଅଛନ୍ତି ।

ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 ଦ୍ୱାରା

$m\angle ACB = m\angle AEB$ ....(1)

ΔADE ରେ $\angle AEB$ ବହିଃସ୍ଥ ।

ସୁତରାଂ $m\angle AEB \neq m\angle ADB$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ADB = m\angle ACB$

$\Rightarrow m\angle AEB \neq m\angle ACB$ ଯାହା (1)କୁ ବିରୋଧ କରୁଛି ।

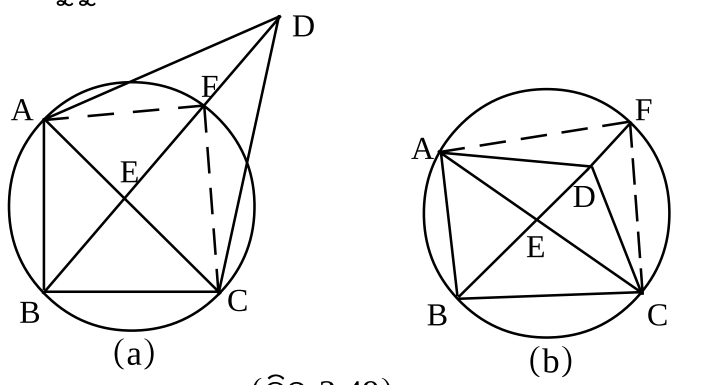
ସେହିପରି $\overleftrightarrow{AD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ E' ଠାରେ ଛେଦ କଲେ $\overline{BE'}$ ଅଙ୍କନ କରି ପୂର୍ବ ପରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ପାଇବା ।

ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ନାହିଁ । ଯଦି D ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ D' ଠାରେ ରହେ ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ଧାରାରେ ଆମେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ପାଇବା । ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ନାହିଁ ।

ସୁତରାଂ D ବିନ୍ଦୁଟି ABC ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ - 2.8ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$ (ଚିତ୍ର 2.49)



(ଚିତ୍ର 2.49)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ।

ପ୍ରମାଣ : (ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ) ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ନୁହେଁ । ତେବେ A,B ଓ C ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ D, ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 2.49)(a)) କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 2.49) (b)) ହେବ । ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$

$= (m\angle A + m\angle C) + (m\angle B + m\angle D) = 180^0 + 180^0 = 360^0$

$\therefore$ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ । E ବିନ୍ଦୁ ABC ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ । ($\because$ E ବିନ୍ଦୁ $\overline{AC}$ ଜ୍ୟା ଉପରିସ୍ଥ) ସୁତରାଂ $\overrightarrow{BE}$ ABC ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁ F ରେ ଛେଦ କରିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ଯଥା : (i) E-F-D (ଚିତ୍ର 2.49(a) ଏବଂ (ii) E-D-F (ଚିତ୍ର 2.49) (b)) ମଧ୍ୟରୁ ସମ୍ଭାବନା (i) ର ପ୍ରମାଣ :

ଚିତ୍ର 2.49 (a) ରୁ $m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC$ ଏବଂ

$m\angle AFC = m\angle AFB + m\angle BFC$ ...(1)

ବର୍ତ୍ତମାନ ABCF ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle ABC + m\angle AFC = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore\ m\angle ABC + m\angle AFC = m\angle ABC + m\angle ADC$

$\Rightarrow m\angle AFC = m\angle ADC$ ... (2)

Δ ADF ରେ $\angle AFB$ ବହିସ୍ଥ $\Rightarrow m\angle AFB > m\angle ADF$

ସେହିପରି ΔCDF ରେ $m\angle CFB > m\angle CDF$

ସୁତରାଂ $m\angle AFB + m\angle CFB > m\angle ADF + m\angle CDF$

$\Rightarrow m\angle AFC > m\angle ADC$ ((1) ଦ୍ୱାରା) ...... (3)

(2) ଓ (3) ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ।

ସୁତରାଂ ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ । ସମ୍ଭାବନା (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ଚିତ୍ର 2.49(b) ସାହାଯ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇ ପାରିବ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକରେ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଇଁ T ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ପାଇଁ F ଲେଖ ।

(i) ବୃତ୍ତର ଏକ ଉପସେଟ୍‌କୁ ଚାପ କହନ୍ତି ।

(ii) ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ଚାପର ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରର ପରିପୂରକ ଚାପ ଅଟନ୍ତି ।

(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ସହିତ ଯୋଗ କଲେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ତାହା ଉକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ ।

(v) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ରୁ ଅଧିକ ହୋଇ ପାରିବ ନାହିଁ ।

(vi) ବୃତ୍ତ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

(vii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ସର୍ବଦା ବୃହତ୍ ଚାପ ଗଠିତ ହେବ ।

(ix) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରତି $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ ଲମ୍ବ ଗଠନ କରାଯାଇଛି । ତେବେ O, Q, P ଓ R ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ।

(x) $\overparen{BPC}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 30^0 । A ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ΔABC ରେ $\angle A$ ର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା 15^0 ହେବ ।

(xi) ଗୋଟିଏ ଚାପ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁର ସମାହାର ଅଟେ ।

(xii) ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ୍ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ... ରୁ ବେଶୀ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ .... ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ABCD ର $m\angle A = 50^0$ ଓ $m\angle B = 120^0$ ହେଲେ $m\angle C$ ଓ $m\angle D$ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର ....।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ $\widehat{AD}$ ଓ .... ଦୁହେଁ ସର୍ବସମ ।

(v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ .... ।

(vi) $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । $m\angle ACB = m\angle ADB = 20^0$ । ΔACDର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $m\angle AOB$ = ... ।

(vii) $m\angle ABC = 90^0$ ହେଲେ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତରେ $\overline{AC}$ ଏକ .... ।

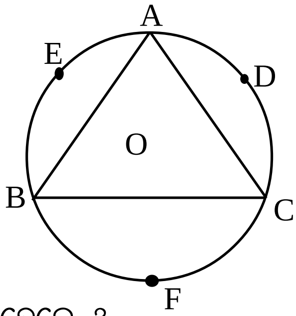
(viii) ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ । $m\angle BAD$ .... ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

(ix) ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ .... ।

(x) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 90^0 ହେଲେ, ସଂପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ .... ।

(ଖ - ବିଭାଗ)

3. ଚିତ୍ର 2.50ରେ ΔABC ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏବଂ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ । D, E, F ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।



(ଚିତ୍ର 2.50)

(i) $\angle B$ କେଉଁ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ?

(ii) $\angle B$ ଦ୍ୱାରା କେଉଁ ଚାପ ଛେଦିତ ?

(iii) $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ ବୃହତ୍ ଚାପ କିଏ ?

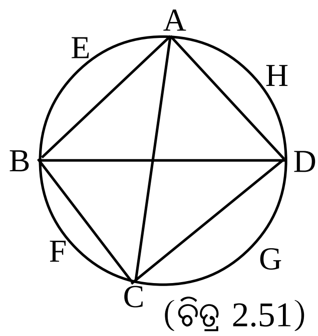
(iv) $\angle A$ ର ପରିମାଣ କେଉଁ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ?

(v) ΔABC ରେ ଯଦି AB = BC ହୁଏ ତେବେ କେଉଁ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ ?

(vi) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ନାମ ଲେଖ ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗରେ $\widehat{BAD}$ ଗଠିତ ହେବ ।

(vii) $\widehat{BFC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ନିଅ ଯେପରିକି $m\angle BPA = m\angle C$ । ଏପରି କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ? ADC ଉପରେ ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ? $\widehat{BEA}$ ଉପରେ ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ?

4. ଚିତ୍ର 2.51 ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $m\widehat{AEB} = 100^0$ ହେଲେ



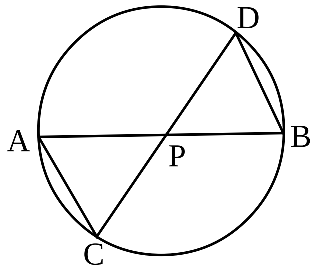
(ଚିତ୍ର 2.51)

(i) ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ କୋଣ ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $\widehat{AHD}$ ଓ $\widehat{BFC}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?

(iii) ABCD କି ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ ?

5. ଚିତ୍ର 2.52 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $m\angle PBD = 80^0$, $m\angle CAP = 45^0$ ହେଲେ



(ଚିତ୍ର 2.52)

(i) ΔBPD ର କୋଣ ପରିମାଣଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ΔAPC ର କୋଣ ପରିମାଣ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ΔAPC ଓ ΔBPD ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?

6. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔBDC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

7. ଚିତ୍ର 2.53 ରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ $\overrightarrow{AP}$ ଓ $\overrightarrow{AR}$ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଏବଂ R, S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି A-P-Q ଏବଂ A-R-S ।

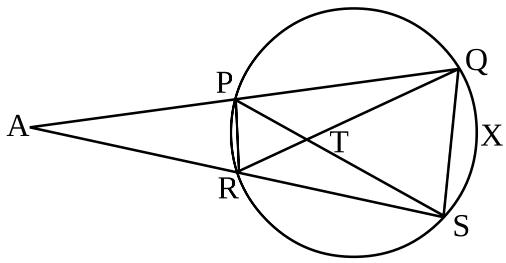
(a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APR \sim \Delta AQS$

(b) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APS \sim \Delta ARQ$

(c) ଯଦି $\overline{PS}$ ଓ $\overline{QR}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ T ହୁଏ, ତେବେ

(i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ TP . TS = TR . TQ

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle PTR = \frac{1}{2}(m\,\widehat{QS} - m\,\widehat{PR})$



(ଚିତ୍ର 2.53)

(d) $m\angle PAR = 15^0$ ଏବଂ $m\,\widehat{QXS} = 50^0$ ହେଲେ $m\angle PTR$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

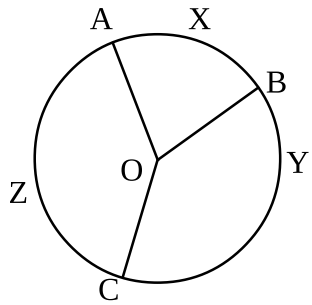
8. ଚିତ୍ର 2.54ରେ ABC ବୃତ୍ତର $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{BYC}$ ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଯଥାକ୍ରମେ 80^0 ଓ 140^0

(i) $m\angle BAC$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $m\,\widehat{ABC}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $m\,\widehat{ACB}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) $\widehat{AZC}$ ଓ $\widehat{BYC}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ?



(ଚିତ୍ର 2.54)

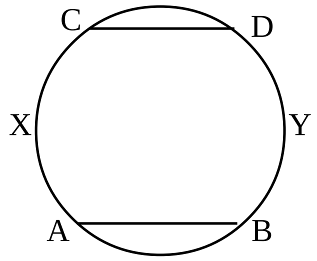
9. ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି A ଓ P ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 ଏବଂ B ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର

ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 50^0 ହୁଏ ତେବେ -

(i) A ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ,

(ii) P ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଏବଂ

(iii) P ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.55)

10. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.55)

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ i) m $\overset{\frown}{AXC}$ = m $\overset{\frown}{BYD}$, (ii) AC = BD

11. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

(i) AC = BD ଏବଂ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AD = BC

(ii) AD = BC ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AC = BD ଏବଂ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

12. (i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଏକ ଚାପ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ C ଅଛି ଯେପରି $\overset{\frown}{AC}$ ଓ $\overset{\frown}{BC}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । (C ବିନ୍ଦୁକୁ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ)

(ସୂଚନା : $\angle AOB$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖା $\overset{\frown}{AXB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ C ଆବଶ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ)

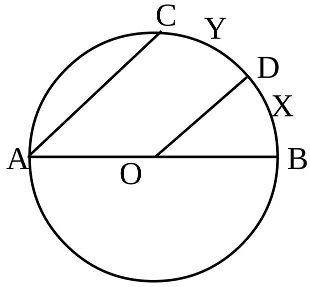
(ii) ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

13. ଚିତ୍ର 2.56 ରେ $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ।

$\overline{OD}$ ଯେକୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । $\overline{AC} \parallel \overline{OD}$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{BXD}$ ଓ $\overset{\frown}{DYC}$ ସର୍ବସମ ଅର୍ଥାତ୍ D, $\overset{\frown}{BDC}$ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

(ସୂଚନା : $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle BOD = m\angle DOC$)

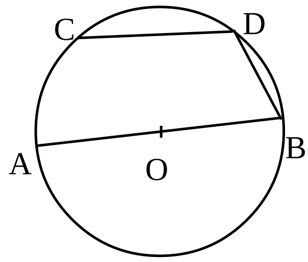


(ଚିତ୍ର 2.56)

ଗ - ବିଭାଗ

14. ଚିତ୍ର 2.57ରେ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ୍ତର

ଏବଂ CD = OB । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle BDC = 2m\angle OBD$ ।



(ଚିତ୍ର 2.57)

15. ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C, $\overleftrightarrow{OP}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି AC = BD ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) AB = CD, (ii) PA = PD ଏବଂ (iii) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ।

16. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ।

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ।

[ସୂଚନା : (i) $\widehat{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଓ $\widehat{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହେଉ । $\overline{AD}$ ବ୍ୟାସ ଅଙ୍କନ କର । $m\angle APD = 90^0 < m\angle APB$]

17. (i) Δ ABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$m\angle BAC + m\angle OBC = 90^0$ ।

(ii) ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$m\angle BAC - m\angle OBC = 90^0$ ।

18. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ।

19. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ K ଓ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ସେହିପରି Q ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । K ଓ M $\overline{PQ}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ ।

20. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle B$ ଓ $\angle D$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $\overleftrightarrow{DE}$ ବୃତ୍ତକୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{BE} \perp \overline{BF}$ ।

21. ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ X, Y, ଓ Z ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔXYZ ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle A$, $90^0 - \frac{1}{2}m\angle B$ ଓ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle C$ ।

22. ΔABCଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PA = PB + PC ।

(ସୂଚନା : $\overrightarrow{BP}$ ଉପରେ D ନିଅ ଯେପରି PC = PD ହେବ । ΔBCD ଓ ΔACP ର ତୁଳନା କର ।)

23. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । P ବିନ୍ଦୁରୁ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AQ = AR = \frac{AB + AC}{2}$ ।

(**ସୂଚନା :** ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Delta ABQ \cong \Delta PCR \Rightarrow BQ = CR$)

24. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି । ସୁତରାଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$AB \,.\, AC = BD \,.\, DC + AD^2$ ।

(ସୂଚନା : ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ $\Rightarrow AB \,.\, AC = AD \,.\, AP,\ AD^2 = AD\,(AP - PD)$)

25. **(ଟଲେମୀଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ)** ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$AC.BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD$ ।

(ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳର ସମଷ୍ଟି ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।)

(**ସୂଚନା :** ମନେକର $m\angle ADB > m\angle BDC$ । E, $\overline{AC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ ଯେପରି $m\angle BDC = m\angle ADE$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ΔADE ଏବଂ ΔBDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$ ।

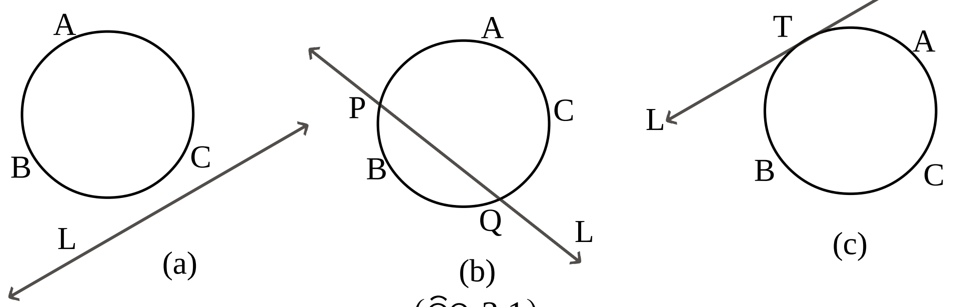
ପୁନଶ୍ଚ ΔADB ଏବଂ ΔEDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{EC}{AB}$)

ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ

(TANGENTS TO A CIRCLE)

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଆମେ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଜାଣୁ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ସେହି ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା । ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ସମ୍ଭାବନା ମଧ୍ୟରୁ କରିଥିବା ଅଙ୍କନରେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସମ୍ଭାବନା ଉପୁଜୁଛି କି ? ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।



(ଚିତ୍ର 3.1)

ଏକ ସମତଳରେ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କଲା ପରେ, ସରଳରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କଲେ ଅଙ୍କନ ପରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଉପୁଜେ । ତାହା ହେଲା – (i) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ (ଚିତ୍ର 3.1(a)) (ii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (ଚିତ୍ର 3.1(b)) ଏବଂ (iii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (ଚିତ୍ର 3.1(c)) ।

ଚିତ୍ର - 3.1(a) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖା L, **ବୃତ୍ତ ABCର ବହିଃସ୍ଥ** ବା ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC **ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ।**

ଚିତ୍ର - 3.1(b) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC ଉଭୟର ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ଅଛନ୍ତି ।** ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC କୁ ପରସ୍ପରଛେଦୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏବଂ L କୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ **ଛେଦକ ରେଖା (Secant)** କୁହାଯାଏ । P ଓ Q ହେଉଛନ୍ତି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ।

ଚିତ୍ର - 3.1(c) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ, ମାତ୍ର ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦବିନ୍ଦୁ (ବା ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ) ସଂଖ୍ୟା ଏକ ।** ଏପରି ଅବସ୍ଥାରେ ସରଳରେଖା L କୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ **ସ୍ପର୍ଶକ (tangent)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି L ସ୍ପର୍ଶକର **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ (Point of contact)** ।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକବୃତ୍ତ ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ଥିଲେ, ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1(c) ରେ ବୃତ୍ତ ABC ର ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି L ଏବଂ T ହେଉଛି ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : L ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ କହିବା ପରିବର୍ତ୍ତେ L ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ବୋଲି କହିବା ।

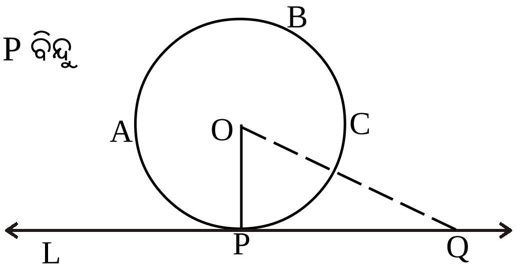
ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ନେଲେ ଏହା ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ (ଚିତ୍ର 3.2) । ନଚେତ୍ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅର୍ଥାତ୍ L ରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । (ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧ୍ୟାୟର ପ୍ରମେୟ - 2.1 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 ପରବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନା ଦେଖ) । ସୁତରାଂ ଆମେ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ଯେ, **କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।**

ଉପପାଦ୍ୟ - 12

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(A tangent to a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.)



(ଚିତ୍ର 3.2)

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , L ରେଖା ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ P ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । $\overline{OP}$ ହେଉଛି P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{OP} \perp L$

ପ୍ରମାଣ : P ଭିନ୍ନ, ରେଖା L ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ Q, ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ।

$\therefore OQ > OP$ ($\because$ $\overline{OP}$, ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

ମାତ୍ର Q ବିନ୍ଦୁ, L ଉପରିସ୍ଥ P ଠାରୁ ଭିନ୍ନ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ Q ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବସ୍ଥାନ ଲାଗି $OQ > OP$ ବା $OP < OQ$ ।

$\therefore$ O ବିନ୍ଦୁରୁ L ରେଖା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

$\Rightarrow \overline{OP} \perp L$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ -3.1 : **(ଉପପାଦ୍ୟ - 12 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :**

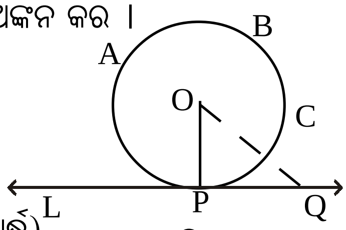
ବୃତ୍ତର କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟେ ।

(The line drawn perpendicular to the radius at a point of a circle through that point, is a tangent to the circle.)

ଦତ୍ତ: ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P, P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ଏବଂ $L \perp \overline{OP}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା ABC ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଅଙ୍କନ : L ରେଖା ଉପରେ , P ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଭିନ୍ନ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ନିଆଯାଉ । $\overline{OQ}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.3)

ପ୍ରମାଣ : $L \perp \overline{OP}$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore$ OPQ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ $\overline{OQ}$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ।

ଅର୍ଥାତ୍ OQ, ବୃତ୍ତର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ OP ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ($\because$ $\overline{OP}$ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

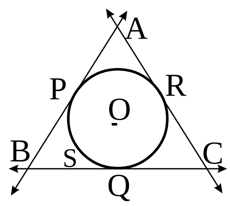
ଏଣୁ, Q ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

$\Rightarrow$ P ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ABC ଓ ରେଖା L ର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ।

$\therefore$ L ରେଖା, ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1) : ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2) : ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । କାରଣ P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ର P ଠାରେ $\overline{OP}$ ପ୍ରତି କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅସଂଖ୍ୟ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିଅଛି ।



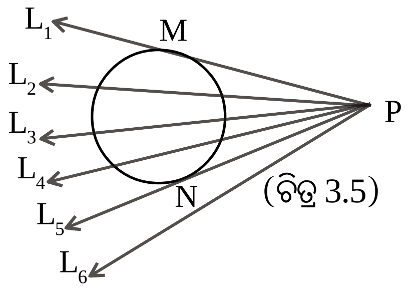
(ଚିତ୍ର 3.4)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଚିତ୍ର 3.4 ରେ S ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରେ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ P, Q ଓ R ନିଆଯାଇ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ABC ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠିତ ହେଉଛି ଏବଂ ବୃତ୍ତ S, ΔABC ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଛି । P, Q, R ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାନକୁ ନେଇ ଆମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇବା । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଯେ କୌଣସି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ PQR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବୃତ୍ତ ବା **ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ (Incircle)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O କୁ ତ୍ରିଭୁଜର **ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର (Incentre)** କୁହାଯାଏ । P, Q, R ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥବାରୁ $\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}$ ଯଥାକ୍ରମେ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ଓ $\overline{CA}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି । ଏହା ସହଜରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଟନ୍ତି ।

3.2 ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ :

ତୁମ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାରେ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ତାର ନାମ ଦିଅ P । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯେତେ ସମ୍ଭବ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର । ଚିତ୍ର 3.5 ଭଳି ଚିତ୍ରଟିଏ ପାଇବ । ସେହି

ଚିତ୍ରରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛଅଗୋଟି ରେଖା $L_1, L_2, L_3, ...L_6$ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଦୁଇଟି L_1 ଓ L_5 ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇଥିବାର ଦେଖିବ ।



(ଚିତ୍ର 3.5)

ଏଣୁ ଆମେ ଏହି କାର୍ଯ୍ୟରୁ ଜାଣିଲେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ଏବଂ କେବଳ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ (ଅବଶ୍ୟ ଏହା ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ତଥ୍ୟ) । ମାତ୍ର ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଆମ ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି : ଚିତ୍ର 3.5 ରେ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ରେଖା L_1 ଓ L_5 ପ୍ରତ୍ୟେକେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ । ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $\overrightarrow{PM} \subset L_1$ ଏବଂ $\overrightarrow{PN} \subset L_5$ । ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ M, $\overrightarrow{PM}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ L_5 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ N, $\overrightarrow{PN}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ମଧ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ଏଣୁ ଆମେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ କୁ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ବୋଲି କହିବା । ଚିତ୍ର 3.5 ରେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ପ୍ରତ୍ୟେକେ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଏବଂ M ଓ N ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟନ୍ତି ।

ସ୍ପର୍ଶକ -ଖଣ୍ଡ (Tangent segment) : ଚିତ୍ର 3.5 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ M ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ L_5 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ N ।

$\overline{PM}$ ଓ $\overline{PN}$ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ **ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ** କୁହାଯାଏ । ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଗୋଟିଏ ରେଖା ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନ ଥାଏ । ମାତ୍ର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ହୋଇଥିବାରୁ **ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଥାଏ ।**

ଟୀକା : 'ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ' କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ତଥା ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ବୁଝିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 13

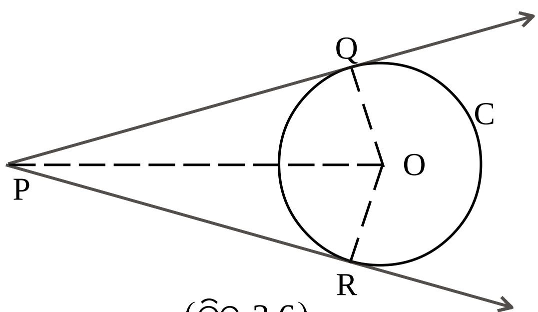
କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

(The lengths of two tangent segments drawn to a circle from an external point are equal.)

ଦତ୍ତ : ବୃତ୍ତ C ର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ C ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଏବଂ Q ଓ R ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : PQ = PR

ଅଙ୍କନ : $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ଏବଂ $\overline{OR}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 3.6)

ପ୍ରମାଣ: ΔOQP ଏବଂ $\Delta\ ORP$ ରେ

$$\because \begin{cases} \angle OQP \cong \angle ORP \quad (\text{ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ । } \because\ \overline{OQ} \text{ ଏବଂ } \overline{OR} \text{ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ}) \\ \text{କର୍ଣ୍ଣ } \overline{OP} \cong \overline{OP} \ (\text{ସାଧାରଣ ବାହୁ}) \text{ ଏବଂ } \overline{OQ} \cong \overline{OR} \ (\text{ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ}) \\ \therefore \Delta\ OQP \cong \Delta\ ORP \quad (\text{ସ.କ.ବା ସର୍ବସମତା}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁ) ଅର୍ଥାତ୍ $PQ = PR$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (1) : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ହେଲେ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ, $\overline{PO}, \angle QPR$ ଏବଂ $\angle QOR$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ-13 ରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି : $\Delta OQP \cong \Delta ORP$

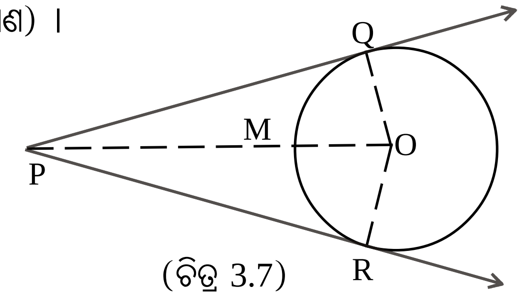
$\Rightarrow \angle OPQ \cong \angle OPR$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PO}$ ଦ୍ୱାରା $\angle QPR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

ପୁନଶ୍ଚ $\angle POQ \cong \angle POR$

(ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PO}$ ଦ୍ୱାରା $\angle QOR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ) ।



(ଚିତ୍ର 3.7)

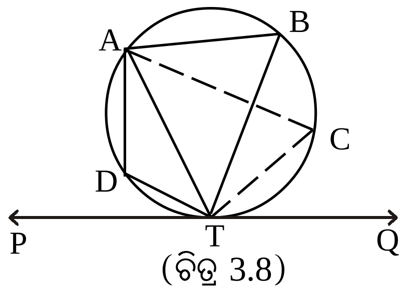
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ହେଲେ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\overline{PO}$, $\widehat{QR}$ ଚାପକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଚିତ୍ର 3.7 ରେ ଯେଉଁଠାରେ $\overline{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । $m\angle QOM = m\angle ROM$ ହେତୁ $\overline{QM}$ ଓ $\overline{MR}$ (ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ) ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ସୁତରାଂ M, $\widehat{QMR}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

3.3 ଏକାନ୍ତର ଚାପ (Alternate arc) :

ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ଥିବା ABC ବୃତ୍ତର T ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି $\overleftrightarrow{PQ}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ । T ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{TA}$ ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କିତ । $\overline{TA}$ ଜ୍ୟାକୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସ୍ପର୍ଶକର **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା $\overline{TA}$, ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସହ $\angle ATP$ ଓ $\angle ATQ$ ଅଙ୍କନ କରେ । ଜ୍ୟା $\overline{TA}$ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତ ABC ଉପରେ ଦୁଇଟି ଚାପ $\widehat{ABT}$ ଓ $\widehat{ADT}$ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ । ଏହା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\overline{TA}$ ଜ୍ୟାର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ତା'ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ । ଏଠାରେ $\widehat{ABT}$ କୁ $\angle ATP$ର **ଏକାନ୍ତର ଚାପ** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ$\angle ABT$ କୁ $\angle ATP$ ର **ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ**



(ଚିତ୍ର 3.8)

କୁହାଯାଏ । ∠ACT ମଧ୍ୟ ∠ATP ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଅଟେ । ଅନୁରୂପ କାରଣରୁ ∠ATQ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ ହେଉଛି $\overset{\frown}{ADT}$ ଏବଂ ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଉଛି ∠ADT ।

3.3.1 ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଓ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ ତଥ୍ୟ :

ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ସମ୍ପର୍କକୁ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରମେୟରେ ପଢ଼ିବା ।

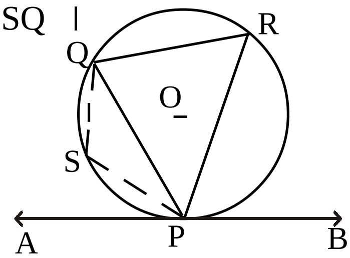
ପ୍ରମେୟ - 3.2 : ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ, ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟା ସହିତ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତା'ର ପରିମାଣ ସହ ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ।

(The measure of an angle formed by a tangent to a circle and a chord through the point of contact is equal to the measure of an angle inscribed in the alternate arc.)

ଦତ୍ତ : O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ PQR ର P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ ଏବଂ $\overline{PQ}$, ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 3.9) । $\overleftrightarrow{AB}$ ସହ $\overline{PQ}$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ ଦୁଇଟି ହେଲେ ∠APQ ଏବଂ ∠BPQ । ∠APQ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ $\overset{\frown}{PRQ}$ ଏବଂ ∠APQ ର ଗୋଟିଏ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ∠PRQ । ସେହିପରି ∠BPQର ଏକାନ୍ତର ଚାପ $\overset{\frown}{PSQ}$ ଏବଂ ∠BPQ ର ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ∠PSQ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : (i) m∠APQ = m ∠PRQ

(ii) m ∠BPQ = m ∠PSQ



(ଚିତ୍ର 3.9)

ପ୍ରମେୟ - 3.3 : (ପ୍ରମେୟ 3.2 ର ବିପରୀତ କଥନ) :

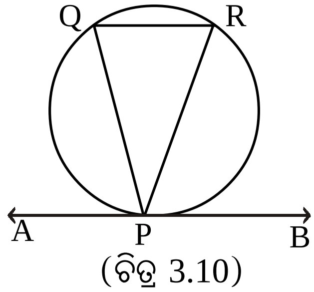
ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟା, ଏହାର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଏକ ସରଳରେଖା ସହ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତାହା ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ସହ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

(If the angle which a chord makes with the straight line drawn through one end of it is equal in measure to the angle inscribed in the alternate arc of the angle, then the line is a tangent to the circle.)

ଦତ୍ତ : PQR ବୃତ୍ତର $\overline{PQ}$ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ । ∠APQ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏକ କୋଣ ∠PRQ । m∠APQ = m ∠PRQ

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\overleftrightarrow{AB}$ ହେଉଛି PQR ବୃତ୍ତର P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ।

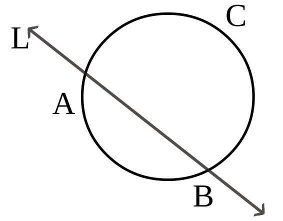
ମନ୍ତବ୍ୟ : ପ୍ରମେୟ 3.2 ଏବଂ ପ୍ରମେୟ 3.3ର ପ୍ରମାଣ ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ; କେବଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ।



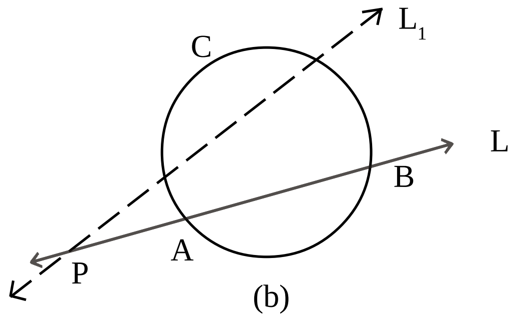
(ଚିତ୍ର 3.10)

3.4 ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ :

ଚିତ୍ର 3.11 (a) ରେ L ରେଖା ABC ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ ରେଖା ଏବଂ ଏହା ବୃତ୍ତ ABC କୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । A, B ଏବଂ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ L ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ବହିଃସ୍ଥ ।



(a)



(b)

(ଚିତ୍ର 3.11)

ଚିତ୍ର 3.11(b) ରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ । ଏଠାରେ ଛେଦକ ରେଖା L, P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ବୃତ୍ତ ABC ର ଅନ୍ୟ ଛେଦକ ରେଖା ହେଉଛି L_1 । ଏହିଭଳି P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ଛେଦକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 14

ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ଏବଂ ଏକ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{PAB}$ ଅଙ୍କିତ ହେଲେ, PA x PB = PT^2 ।

(If from an external point P of a circle a tangent segment $\overline{PT}$ and a secant $\overleftrightarrow{PAB}$ are drawn, then PA x PB = PT^2.)

ଦତ୍ତ : TBA ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ $\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ, ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : PA x PB = PT^2

ଅଙ୍କନ : $\overline{TA}$ ଓ $\overline{TB}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

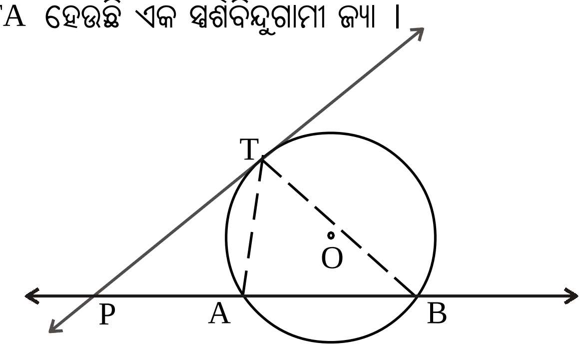
ପ୍ରମାଣ : TAB ବୃତ୍ତର T ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $\overline{TA}$ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ।

$\therefore m\angle PTA = m\angle TBA$ (ପ୍ରମେୟ - 3.2)

ΔPTA ଏବଂ ΔPBT ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} m\angle TPA = m\angle TPB \text{ (ସାଧାରଣ କୋଣ) ଏବଂ} \\ m\angle PTA = m\angle TBP \end{cases}$

$\therefore \Delta PTA \sim \Delta PBT$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

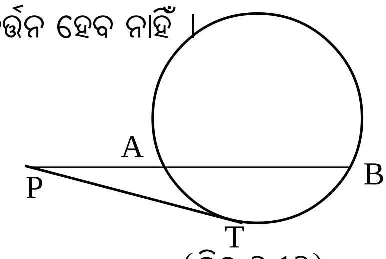


(ଚିତ୍ର 3.12)

$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} = \frac{AT}{BT} \Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \times PB = PT^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ (i) : ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରମାଣରେ, ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P, A ଓ B କୁ P - A- B ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି । ସେ ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟିକୁ P - B - A ରୂପେ ନିଆଗଲେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ନାହିଁ ।

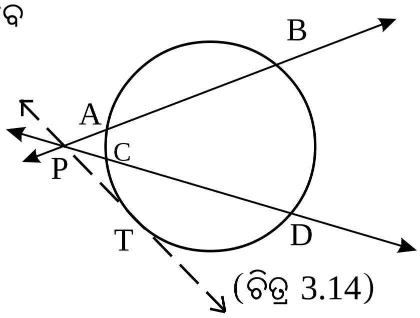
ମନ୍ତବ୍ୟ (ii): ପୂର୍ବ ପ୍ରମାଣିତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ଚିତ୍ର 3.13 ଭଳି ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର କରାଯାଇପାରେ ।



(ଚିତ୍ର 3.13)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ –1: ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଯଦି ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A,B ଓ C,D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତେବେ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ (ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T) ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ଯେ,

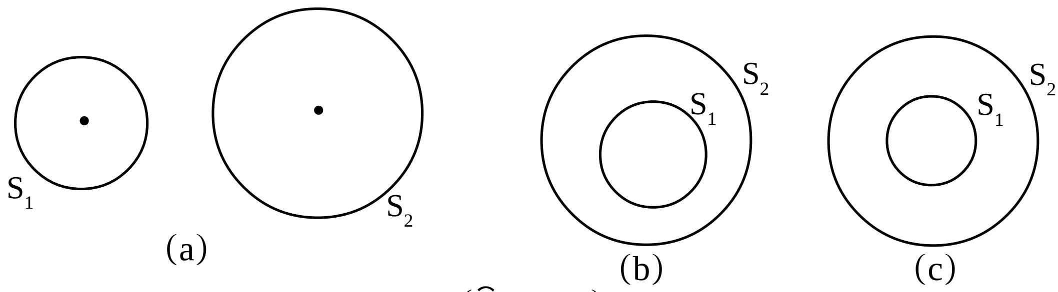
PA x PB = PC x PD



(ଚିତ୍ର 3.14)

3.5 ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ତଥ୍ୟ :

ଏକ ସମତଳରେ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି S_1 ଓ S_2 ର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 3.15)

(a) ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ :

ଚିତ୍ର 3.15 (a)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଏବଂ ପରସ୍ପରର ବହିଃସ୍ଥ ।

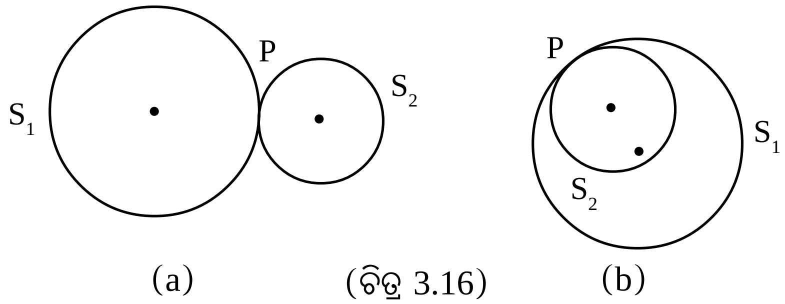
ଚିତ୍ର 3.15 (b)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଏବଂ ବୃତ୍ତ S_1, S_2 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ।

ଚିତ୍ର 3.15 (c)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 **ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ** ଏବଂ ବୃତ୍ତ S_1 ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତ S_2 ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏବଂ **ଉଭୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଭିନ୍ନ** । ଏପରି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ **ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ (Concentric circle)** କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟ ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ହୋଇପାରନ୍ତି ।

ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତର ସଂଯୋଗରେ ଏକ **ବୃତ୍ତାକୃତି ବଳୟ (Circular annulus)** ଗଠିତ ହୁଏ । ଏକ ବୃତ୍ତାକୃତି ବଳୟରେ **ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶର ଛେଦ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ବଳୟାକୃତି କ୍ଷେତ୍ର (Annular Region) କୁହାଯାଏ ।**

(b) ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବୃତ୍ତ ।

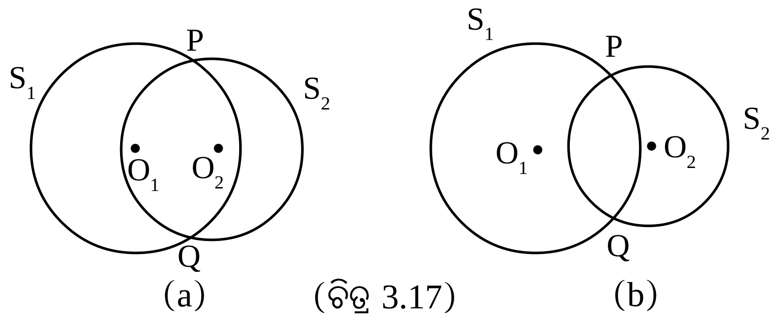


(ଚିତ୍ର 3.16)

ଚିତ୍ର 3.16 (a)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି P ।

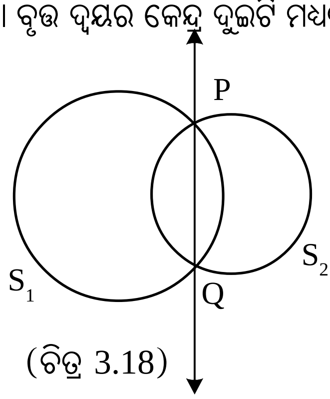
ଚିତ୍ର 3.16 (b)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି P । ଏଠାରେ S_2 ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, S_1 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ । (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଯୋଡ଼ିକୁ **ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ (tangent circles)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର(a)ରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ (Externally tangent circles)** ଓ ଚିତ୍ର (b)ରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ **ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ (Internally tangent circles)** କୁହାଯାଏ ।

(c) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତ :



(ଚିତ୍ର 3.17)

ଚିତ୍ର 3.17 (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚିତ୍ର (a) ଓ (b)ରେ ବୃତ୍ତଯୋଡ଼ିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବିଶେଷ କିଛି ପାର୍ଥକ୍ୟ ନାହିଁ । (a) ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦୁଇଟି ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ବେଳେ (b) ଚିତ୍ରରେ ଥବା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.18)

ଚିତ୍ର 3.18 ରେ ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ଦର୍ଶାଯାଇଛି । P ଓ Q ହେଉଛନ୍ତି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ। $\overleftrightarrow{PQ}$ ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ (Radical axis)** କୁହାଯାଏ । **ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।**

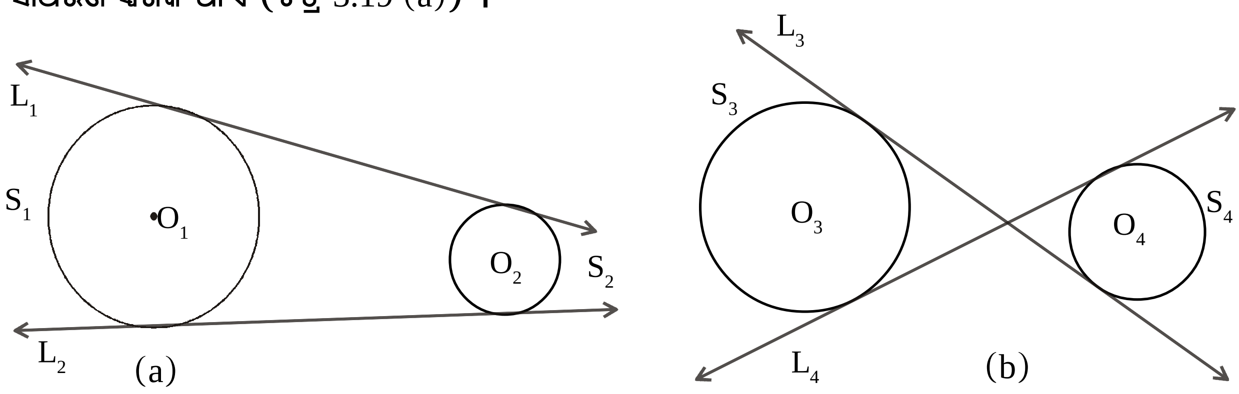
ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ଅଧିକ ଜାଣିବ । $\overline{PQ}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ସାଧାରଣ ଜ୍ୟା (Common chord)** କୁହାଯାଏ ।

3.6 ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (Common Tangents)

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତକୁ ସେହି ସମତଳରେ ଯେଉଁ ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରେ ତାକୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (Common tangent)** କୁହାଯାଏ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଅବସ୍ଥିତିରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ଚିତ୍ର ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

(a) ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :

ଚିତ୍ର 3.19 (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଚିତ୍ର 3.19 (a)ରେ ଥିବା S_1 ଓ S_2 ଉଭୟ ବୃତ୍ତକୁ L_1 ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଓ O_2 ଉଭୟ L_1 ରେଖାର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ L_1 ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର **ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (direct common tangent)** କୁହାଯାଏ । L_2 ରେଖା ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର (a)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । ଏଣୁ **ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଗୋଟି ସରଳ ସାଧରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ (ଚିତ୍ର** 3.19 (a)**) ।**

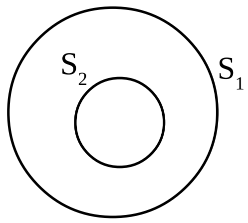


(ଚିତ୍ର 3.19)

ଚିତ୍ର 3.19 (b)ରେ ଥିବା S_3 ଓ S_4 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ L_3 ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ଏବଂ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ କେନ୍ଦ୍ର O_3 ଏବଂ O_4 , L_3 ରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଛନ୍ତି । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକକୁ **ତୀର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (transverse common tangent)** କୁହାଯାଏ ।

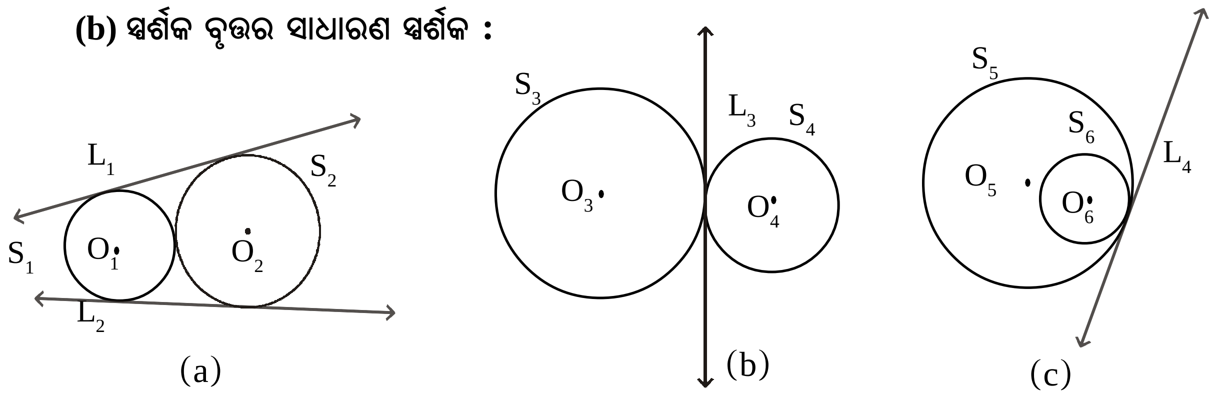
ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ **ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତ ଲାଗି ଦୁଇଟି ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।(ଚିତ୍ର** 3.19 (b)**)**

ଚିତ୍ର 3.20 ରେ **ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ମଧ୍ୟରୁ S_2 ବୃତ୍ତ S_1 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ । ଏଣୁ ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।**



(ଚିତ୍ର 3.20)

(b) ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :



(ଚିତ୍ର 3.21)

(i) **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :** ଚିତ୍ର 3.21 (a)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ (ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ) L_1 ଓ L_2 ଉଭୟ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।

(ii) **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :**

3.21 (b) ରେ S_3 ଓ S_4 ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ । L_3 ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । ଏହା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ହିଁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ।

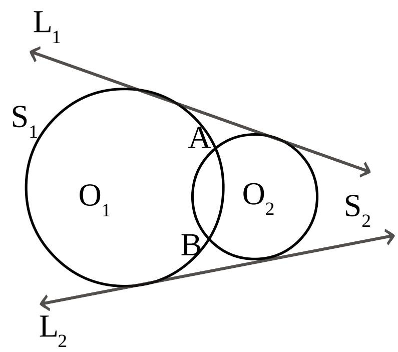
(iii) **ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :**

ଚିତ୍ର 3.21 (c) ରେ S_5 ଓ S_6 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ । L_4 ରେଖା ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ଏହା ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଚିତ୍ର 3.21 (a) ଓ (c) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ଚିତ୍ର 3.21 (b) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । କାହିଁକି ?

(c) ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :

ଚିତ୍ର 3.22 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏଠାରେ L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଏବଂ O_2 ଉଭୟ L_1 ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । O_1 ଏବଂ O_2 ଉଭୟ L_2 ର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏଣୁ L_1 ଓ L_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ, S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।



(ଚିତ୍ର 3.22)

3.7 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ-ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟର ଆପେକ୍ଷିକ ଅବସ୍ଥିତି :

ପରସ୍ପରକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ,ଏହିପରି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଆପେକ୍ଷିକ ଅବସ୍ଥିତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟରେ ପଢ଼ିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 15

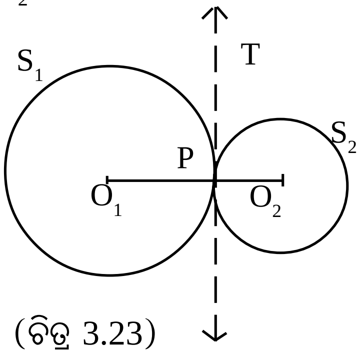
ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(The centres of two tangent circles and their point of contact are collinear)

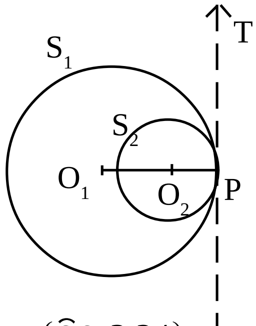
ଦତ୍ତ : S_1 ଓ S_2 ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 ।

ଚିତ୍ର 3.23ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ ଚିତ୍ର 3.24ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : O_1, O_2 ଏବଂ P ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.23)



(ଚିତ୍ର 3.24)

ଅଙ୍କନ : ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{PO_1}$ ଓ $\overline{PO_2}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । (ଚିତ୍ର 3.23 ଓ ଚିତ୍ର 3.24 ରେ ଯଥାକ୍ରମେ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।)

ପ୍ରମାଣ : S_1 ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ PO_1 । $\therefore \overline{O_1P} \perp \overleftrightarrow{PT} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_1P} \perp \overleftrightarrow{PT}$

ସେହିପରି S_2 ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{O_2P}$ ।

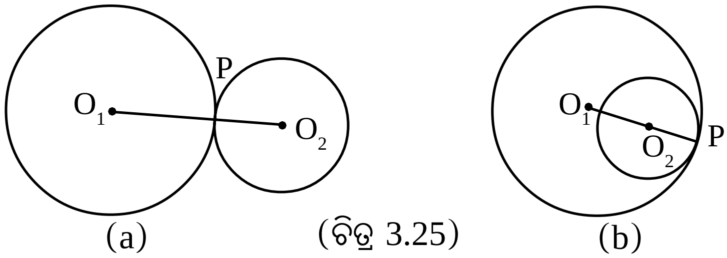
$\therefore \overline{O_2P} \perp \overleftrightarrow{PT} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_2P} \perp \overleftrightarrow{PT}$

ମାତ୍ର $\overleftrightarrow{PT}$ ର P ବିନ୍ଦୁରେ ଗୋଟିଏ ଓ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବ ସମ୍ଭବ । $\therefore$ $\overleftrightarrow{O_1P}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{O_2P}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ ।

ଏଣୁ O_1 , O_2 ଓ P ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1 : ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ [ଚିତ୍ର 3.25 (a)]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନ୍ତର ସହ ସମାନ [(ଚିତ୍ର 3.25 (b))]



(ଚିତ୍ର 3.25)

ଚିତ୍ର 3.25 (a)ରେ $O_1O_2 = O_1P + O_2P$ [$\because O_1$-P-O_2]

ଚିତ୍ର 3.25 (b)ରେ $O_1O_2 = O_1P - O_2P$ [$\because O_1$-O_2-P]

ସ୍ପର୍ଶକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉଦାହରଣ :

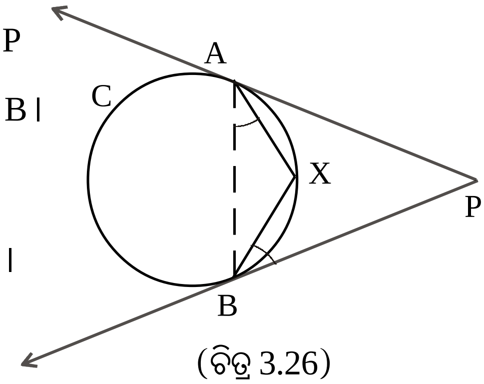
ଉଦାହରଣ -1 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । $m\angle APB = 42^0$ ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

ଦତ୍ତ : ଚିତ୍ର 3.26 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ABCର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B।

$\overset{\frown}{AXB}$ ହେଉଛି A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ।

$\angle AXB$ ହେଉଛି $\overset{\frown}{AXB}$ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଗୋଟିଏ କୋଣ ।

$m\angle APB = 42^0$ ।



(ଚିତ୍ର 3.26)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ : $m\angle AXB$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ସମାଧାନ : ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PB}$ ଓ $\overline{BX}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ହେତୁ, $m\angle XBP = m\angle BAX$ (ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ) । ମନେକର $m\angle XBP = m\angle BAX = a^0$ ହେଉ ।

ସେହି କାରଣରୁ $m\angle XAP = m\angle ABX = b^0$ ହେଉ ।

$\therefore$ $m\angle PAB = (a+b)^0$ ଏବଂ $m\angle PBA = (a+b)^0$

ΔPAB ରେ, $m\angle PAB + m\angle PBA + m\angle APB = 180^0$

$\Rightarrow (a+b)^0 + (a+b)^0 + 42^0 = 180^0$

$\Rightarrow 2(a+b) = 180 - 42 \Rightarrow 2(a+b) = 138 \Rightarrow a+b = \frac{138}{2} = 69$ ... (1)

ΔAXB ରେ $m\angle AXB + m\angle XAB + m\angle XBA = 180^0$

$\Rightarrow m\angle AXB + a^0 + b^0 = 180^0 \Rightarrow m\angle AXB + 69^0 = 180^0$ [(1) ଅନୁଯାୟୀ]

$\Rightarrow m\angle AXB = 180^0 - 69^0 = 111^0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -2 : ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ । ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ହେଲେ $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଦତ୍ତ : ଚିତ୍ର 3.27 ରେ . $\overleftrightarrow{PQ}$ ହେଉଛି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BQ}$ ହେଉଛନ୍ତି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ମନେକର $AP= r_1$, $BQ= r_2$ ଏବଂ $r_1 \geq r_2$ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ : $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC} \perp \overline{AP}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ସମାଧାନ : $\angle APQ$ ଓ $\angle BQP$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣ

[$\overline{AP}$ ଓ $\overline{BQ}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେତୁ]

$\angle BCP$ ସମକୋଣ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ।

ଏଣୁ BCPQ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଥ କୋଣ $\angle CBQ$ ମଧ୍ୟ ଏକ ସମକୋଣ । $\therefore$ BCPQ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ଫଳରେ PQ = BC .... (1)

ଏବଂ PC = BQ .... (2)

$AP = r_1$, $BQ = r_2$ ଏବଂ $AC = AP - PC = r_1 - r_2$

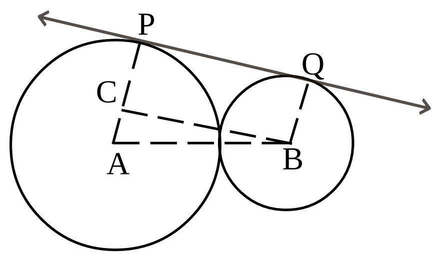
ΔABC ରେ, $\angle ACB = 90^0$ [$\because \overline{BC} \perp \overline{AP}$ ଅଙ୍କନ]

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$

[ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା = $r_1 + r_2$]

$\Rightarrow BC = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

$\therefore PQ = BC = 2\sqrt{r_1r_2}$ (ଉତ୍ତର)



(ଚିତ୍ର 3.27)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3

(କ - ବିଭାଗ)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{PT}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ, $m\angle OTP$ = ...

(ii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ । $\angle XPY$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେଲେ, $\angle XOY$ ଏକ .... କୋଣ ।

(iii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PT}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ, $m\angle TOP + m\angle TPO$ = ...

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ହେଲେ, (a) XOP କୋଣ ଓ ... କୋଣ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ;

(b) YPO କୋଣ ଓ .... କୋଣ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ OP ଓ r ମଧ୍ୟରେ .... ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

(vi) 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 13 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଓ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, $\overline{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ .... ସେ.ମି.

(vii) କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ r ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ସେ.ମି. ହେଲେ OP = ... ସେ.ମି. ।

(viii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର (a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ... ଏବଂ

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(ix) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(x) ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ହୋଇଥିବା ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(xi) ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ହୋଇ ନ ଥିବା ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(xii) Δ ABC ର AB = AC । Δ ABC ର ପରିବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରି P ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle PAC = 70^0$ ହେଲେ, $m\angle ABC$ = ...

(xiii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି ହେଲେ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା .... ସେ.ମି. ।

(xiv) ଦୁଇଟି ବର୍ହିସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସହ ସମାନ ।

(xv) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(xvi) ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ସରଳରେଖାଟି ସର୍ବାଧିକ ..... ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇପାରିବ ।

2. ଦତ୍ତ ଥିବା ଉକ୍ତି ଭୁଲଥିଲେ (ଏହାକୁ ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିର ନାସ୍ତିବାଚକ ଉକ୍ତି (Negative Statement) ବ୍ୟବହାର ନ କରି) ସଂଶୋଧନ କର ।

(i) r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର L ରେଖା ଏକ ଛେଦକ ହେଲେ, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ L ର ଦୂରତା = r ଏକକ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ହେଲେ ΔOPT ରେ $\angle POT$ ଏକ ସମକୋଣ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ଏକକ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ P ର ଦୂରତା d ଏକକ ହେଲେ, $d^2 + r^2 = t^2$.

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$; P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତଟିକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରି P-A-B । ତେବେ $PT^2 = PA \times AB$

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

(vi) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଅଛି, ଯେଉଁଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।

(vii) ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ସହ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସମାନ ହେଲେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ପାର୍ଥକ୍ୟ ସହ ସମାନ ।

(ix) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବ ।

(x) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର କେବଳ ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।

(xi) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ, ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(xii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ, ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟିର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

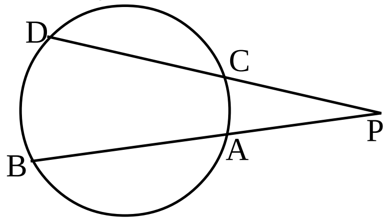
3. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି. । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ PO=17 ସେମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

ଖ – ବିଭାଗ

4. ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4.5 ସେ.ମି. ଓ 12.5 ସେ.ମି. । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

5. ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ଏକ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା 20 ସେମି. ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟ 7 ସେମି ଓ 5 ସେମି. ହେଲେ, PQ କେତେ ସେ.ମି. ?

6. ଚିତ୍ର - 3.28 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦଣ୍ଡ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅନ୍ୟ ଏକ ଛେଦକ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-C-D । (i) ସ୍ପର୍ଶକ-ସମ୍ପୃକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.28)

PA x PB = PC x PD

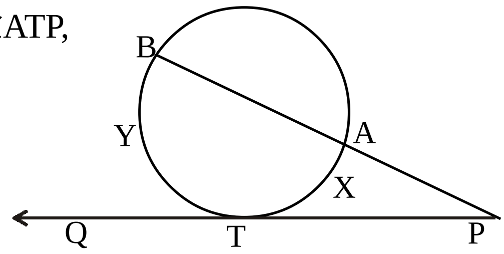
(ii) PA = 10 ସେ.ମି. PB = 16 ସେ.ମି. ଓ PD = 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ AB = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଚିତ୍ର 3.29 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଯେପରି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T ।

(i) $m\,\widehat{AXT} = 60^0$ ଏବଂ $m\,\widehat{BYT} = 130^0$ ହେଲେ $m\angle ATP$,

$m\angle APT$, $m\angle ATB$ ଓ $m\angle BTQ$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.29)

(ii) $m\angle BTQ = 2m\angle ATP$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର : (a) BT = TP (b) TA = AP

(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ PT = 12 ସେ.ମି ହେଲେ, AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) PT = 2AP ଏବଂ AB = 18 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

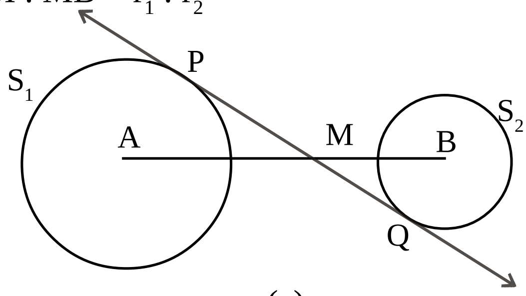
(v) PT = 2AP ଏବଂ PB = 24 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.(a) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହାର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

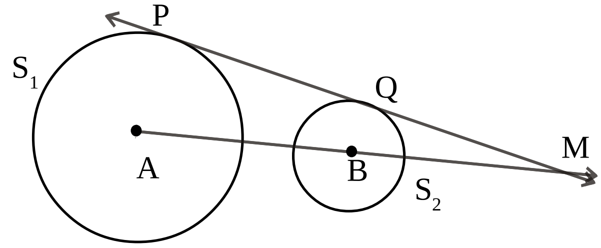
(b) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

9. ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A ଓ B । $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି A-B-P । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

10. ଚିତ୍ର 3.30 ରେ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । ଚିତ୍ର 3.30 (a)ରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : MB = r_1 : r_2$



(a)



(b)

(ଚିତ୍ର 3.30)

ଚିତ୍ର 3.30 (b) ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି A-B-M . । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : BM = r_1 : r_2$ ।

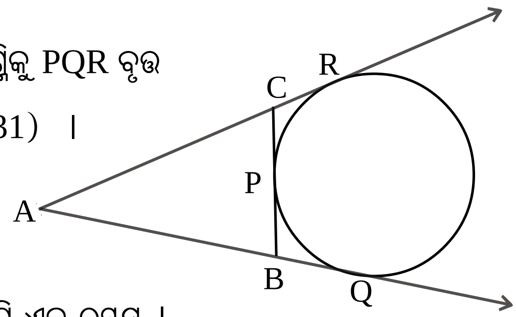
11. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{QR}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।

12. ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ବୃତ୍ତର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ।

14. ΔABC ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{BC}$ ବାହୁ, $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମି ଓ $\overrightarrow{AC}$ ରଶ୍ମିକୁ PQR ବୃତ୍ତ ଯଥାକ୍ରମେ P,Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ (ଚିତ୍ର 3.31) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AQ = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

15. ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମସ୍ତ ବାହୁକୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟି ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।



(ଚିତ୍ର 3.31)

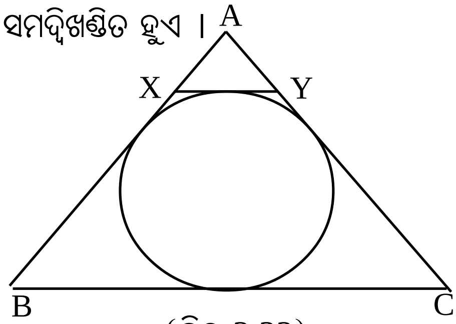
ଗ - ବିଭାଗ

16. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏହି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ଠାରୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ । $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABP ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

17. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକବିନ୍ଦୁ । $\overrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T, $\overline{OP}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q (ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ) ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ QT = QP ।

18. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PT}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ରେଖା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି P-A-B । $\overline{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ C ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର: (a) $\overrightarrow{TC}$, $\angle ATB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ, PC=PT

(b) PC = PT ହେଲେ $\overrightarrow{TC}$ ଦ୍ୱାରା $\angle ATB$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

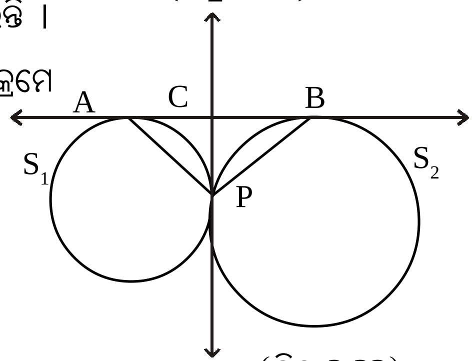


(ଚିତ୍ର 3.32)

19. ΔABC ର ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତକୁ $\overline{XY}$ ସ୍ପର୍ଶ କରିବ (ଚିତ୍ର 3.32) ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AX + XY +YA= AB + AC – BC

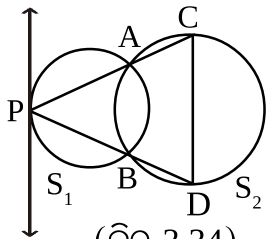
20. ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣସ୍ପର୍ଶକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର - 3.33)। P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (a) AC = BC ଏବଂ

(b) $m\angle APB = 90^0$



(ଚିତ୍ର 3.33)

21. S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 3.34) । S_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଅଙ୍କିତ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ S_2 ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ S_1 ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{CD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 3.34)

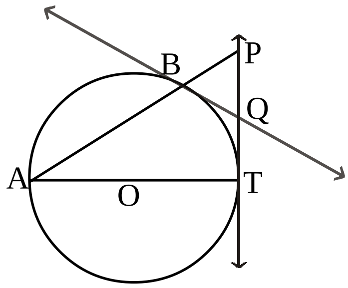
22. ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ଏବଂ $r_1 > r_2$ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା d ଏକକ ହେଲେ

(a) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ A ଓ B ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = d^2 (r_1 – r_2)^2$ ଏବଂ

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ C ଓ D ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $CD^2 = d^2(r_1+ r_2)^2$

23. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । $\overline{QR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ S ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{QS}$ ଦ୍ୱାରା $\angle PQR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

24. ଚିତ୍ର -3.35 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର $\overline{AT}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ B । $\overrightarrow{AB}$ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{TP}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\overline{PT}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 3.35)

25. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\overline{CA}$, ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = AC \times AD$

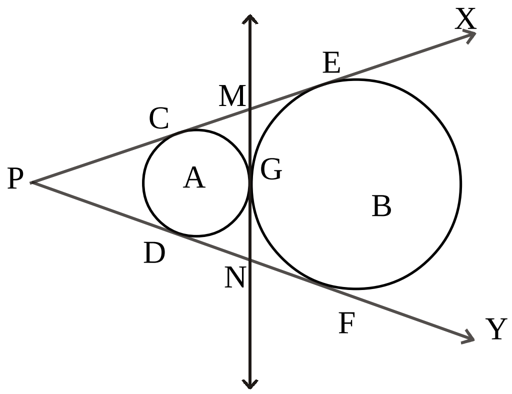
26. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି C-B-D । ଯଦି $\overline{CA}$ ଓ $\overline{DA}$ ଯଥାକ୍ରମେ ବୃତ୍ତକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AC \times AP = AD \times AQ$

27. ଚିତ୍ର 3.36 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ G ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମି $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ P । S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତକୁ $\overrightarrow{PX}$ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\overrightarrow{PY}$ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି ।

(a) ପ୍ରମାଣ କର :

(i) P, A, G, B ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ

(ii) CE = DF

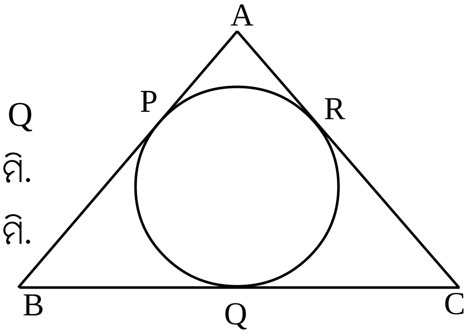


(ଚିତ୍ର 3.36)

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (i) PM = PN, (ii) MG = NG ।

28. ପରସ୍ପର ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P । ଏକ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle APC$ ଓ $\angle BPD$ ସର୍ବସମ । [A-C-D ଓ A-D-C ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ।]

29. ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । (ଚିତ୍ର -3.37) BQ = 8 ସେ.ମି. CQ = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ ΔABC ର ପରିସୀମା 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, AB ଓ AC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

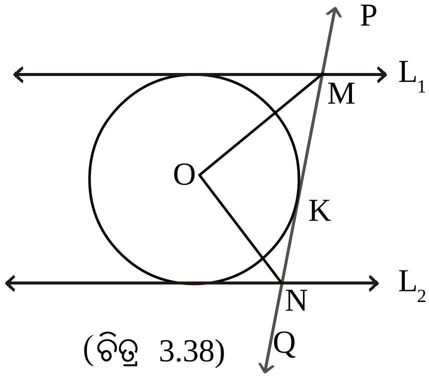


(ଚିତ୍ର 3.37)

30. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ପରିଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle AOB$ ଓ $\angle COD$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । $\angle BOC$ ଏବଂ $\angle AOD$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

31. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$, ଏହି ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ $\widehat{APB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

32. ଚିତ୍ର 3.38 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $L_1 \parallel L_2$ । ବୃତ୍ତର K ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$, L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle MON$ ଏକ ସମକୋଣ ।



(ଚିତ୍ର 3.38)

■ ■ ■