ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ

ତ୍ରିକୋଣମିତି

(TRIGONOMETRY)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\text{cosec}\,\theta$ ର ସଂଜ୍ଞା, ଏହି ଅନୁପାତମାନଙ୍କୁ ନେଇ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସୂତ୍ର ଏବଂ $\theta = 30^0, 45^0$ ଓ 60^0 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କେତକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଅନ୍ୟ କେତେକ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବା । ସାଧାରଣ ଜୀବନରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ବ୍ୟବହାର ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିବା ।

ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ θ ହେଉ । ଯେହେତୁ $\theta = 0^0$ କିମ୍ବା 90^0 ହେଲେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ p (ଉଚ୍ଚତା), b (ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଓ h (କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ ମାଧ୍ୟମରେ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦିର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ, ତେଣୁ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$, $\sin 90^0$ ଓ $\cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଜ୍ଞାରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ ।

ସଂଜ୍ଞା : (1) $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\tan 0^0 = \dfrac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0$, $\sec 0^0 = \dfrac{1}{\cos 0^0} = 1$

$\dfrac{1}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ ହୋଇଥିବାରୁ $\dfrac{\cos 0^0}{\sin 0^0}$ ଓ $\dfrac{1}{\sin 0^0}$ ଉଭୟ ଅର୍ଥହୀନ ।

ତେଣୁ $\cot 0^0$ ଓ $\text{cosec}\,0^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ (undefined) ।

(2) $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\cot 90^0 = \dfrac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = 0$, $\text{cosec}\,90^0 = \dfrac{1}{\sin 90^0} = 1$

$\tan 90^0$ ଓ $\sec 90^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣ ଯେ କୌଣସି କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ θ ହେଲେ ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $0 < \theta < 180$ । ସୁତରାଂ $\theta = 0$ କିମ୍ବା $\theta = 180^0$ ଲେଖିବାର ଯଥାର୍ଥତା ନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ଅନ୍ତର 0^0 ଏବଂ ଯୋଗ 180^0 ହୋଇପାରେ । ପୁନଶ୍ଚ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦି ଛଅଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତକୁ ବ୍ୟାପକ ଅର୍ଥରେ ତଥା

ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ (Trigonometric function) ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି, ଯେଉଁ ଠାରେ θ ଏକ ଚଳରାଶି (variable ବା argument); ଅର୍ଥାତ୍ θ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ (real)ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ସୁତରାଂ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$, $\sin 180^0$, $\cos 180^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମୂଲ୍ୟ ସଂଜ୍ଞାବଦ୍ଧ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

2. କୋଣର ପରିମାଣ ପାଇଁ θ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରର ସଂକେତ ଯଥା α (ଆଲଫା), β (ବିଟା) ଓ γ (ଗାମା) ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

4.2 ଅନୁପୂରକ (Complementary) କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

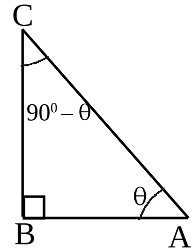
ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ θ ହେଉ । ତେବେ ଯେଉଁ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ θ ଓ $90^0 - \theta$, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ଅଟନ୍ତି । θ ଓ $90^0 - \theta$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମ୍ପର୍କକୁ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର 4.1 ରେ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ । $m\angle B = 90^0$

ମନେକର $m\angle BAC = \theta \Rightarrow m\angle BCA = 90^0 - \theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$, $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$, $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$,

$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ ଏବଂ $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



(ଚିତ୍ର - 4.1)

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\sin(90^0 - \theta) = \frac{AB}{AC}$ ମାତ୍ର $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$

ସେହିପରି $\cos(90^0 - \theta) = \frac{BC}{AC} = \sin\theta$, $\tan(90^0 - \theta) = \frac{AB}{BC} = \cot\theta$

$\cot(90^0 - \theta) = \frac{BC}{AB} = \tan\theta$, $\sec(90^0 - \theta) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec}\theta$ ଏବଂ

$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{AC}{AB} = \sec\theta$

$\therefore$ $0^0 < \theta < 90^0$ ପାଇଁ ଆମେ ପାଇଲେ

ସୂତ୍ର A :

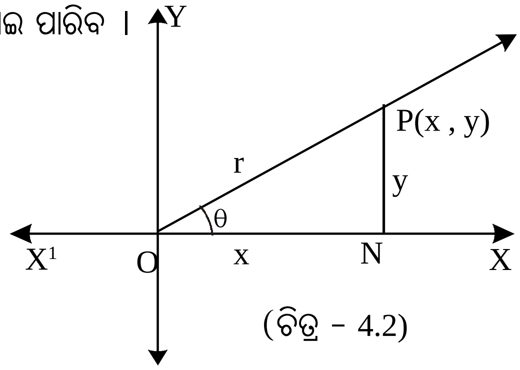
$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta, & \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta \\ \tan(90^0 - \theta) = \cot\theta, & \cot(90^0 - \theta) = \tan\theta \\ \sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta, & \operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta \end{array}}$$

4.3. ସ୍ଥୂଳକୋଣମାନଙ୍କର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

ପୂର୍ବରୁ 0^0 ଠାରୁ 90^0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଆଲୋଚିତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସଂଜ୍ଞାକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ବିକଳ୍ପ ଉପାୟରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ଏବଂ ପ୍ରକୃତରେ ଏହି ବିକଳ୍ପ ସଂଜ୍ଞା ହିଁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଙ୍କ ପରିସର ବିସ୍ତାର ପାଇଁ ସହାୟକ ।

କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ P(x,y) ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\angle XOP$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ (ଚିତ୍ର 4.2) ।

$\overline{PN}$, P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ମନେକର $m\angle XOP = \theta$ । $\angle XOP$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O (ମୂଳବିନ୍ଦୁ) ଠାରୁ P ର ଦୂରତା = r ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ବ୍ୟବହାର କରି PON ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PON = \theta$ ନିମନ୍ତେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନମତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।



(ଚିତ୍ର – 4.2)

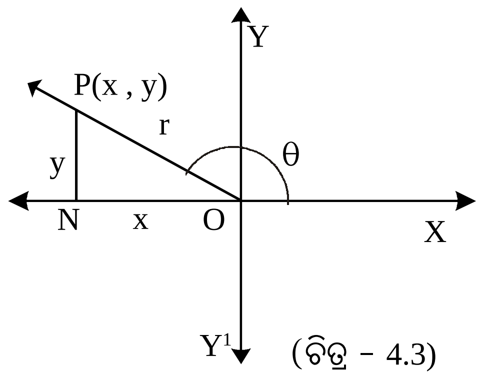
$$\sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{r} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{r} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{y}{x} \text{ ଇତ୍ୟାଦି ।}$$

ଏଠାରେ P ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଥିବାରୁ x ଓ y ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ OP, r ଦୂରତା ସୂଚାଉ ଥିବାରୁ ଏହା ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ । ଯେଉଁଠାରେ $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ସେହିପରି $\angle XOP$ ଏକ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 4.3) ଅନୁରୂପ ଭାବେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରିବା । ମାତ୍ର P ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ ଏହାର ଭୁଜ (= x) ଋଣାତ୍ମକ ଓ କୋଟି (= y) ଧନାତ୍ମକ । ମନେକର $m\angle XOP = \theta\ (0^0 < \theta < 180^0)$



(ଚିତ୍ର – 4.3)

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{r} = \frac{y}{r}, \text{ ଯାହାକି ଧନାତ୍ମକ,}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{r} = \frac{x}{r} \text{ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{y}{x} \text{ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}} = \frac{x}{y} \text{ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ,}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{r}{x} \text{ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ ଏବଂ}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}} = \frac{r}{y} \text{ ଓ ଏହା ଧନାତ୍ମକ}$$

4.5 : $\theta = 180^0$ ନିମନ୍ତେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ :

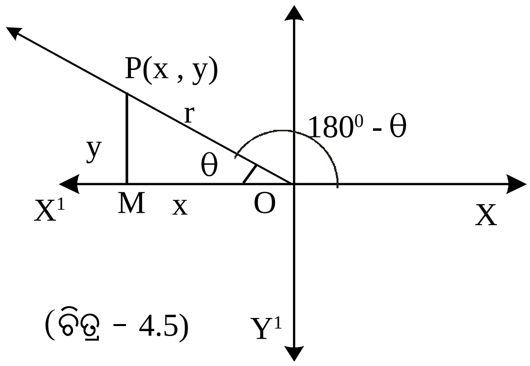
କୌଣସି କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ θ ଏବଂ $0 < \theta < 180$ ହେଲେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.2 ଏବଂ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.3 ରୁ ତୁମେମାନେ ପାଇସାରିଛ । $\theta = 0^0$ କିମ୍ବା 90^0 କିମ୍ବା 180^0 ହେଲେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ P (ଉଚ୍ଚତା), b (ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଏବଂ h (କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ମାଧ୍ୟମରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ତେଣୁ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$; $\sin 90^0$, $\cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ସଂଜ୍ଞା

ନିରୂପଣ ଭଳି sin 180^0, cos 180^0 ଇତ୍ୟାଦିକୁ ସଂଜ୍ଞା ବଦ୍ଧ କରିବା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ଉକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟାପକୀକୃତ କରିପାରିବା ।

$\sin 180^0 = 0$	$\text{cosec } 180^0$ (ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ)
$\cos 180^0 = -1$	$\sec 180^0 = -1$
$\tan 180^0 = 0$	$\cot 180^0$ (ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ)

4.6 ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ θ ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ କୋଣ ($180^0 - \theta$) ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ଚିତ୍ର 4.5 ରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜ ଉପରେ XOX' ଓ YOY' ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷରେଖା ଏବଂ O ମୂଳବିନ୍ଦୁ । O ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରରେ P(x, y) ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $m\angle POX = (180^0 - \theta)$ ହେଉ (θ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ) । ତେବେ $m\angle POM = \theta$



(ଚିତ୍ର - 4.5)

$$\sin(180^0 - \theta) = \frac{y}{r} = \frac{PM}{OP} \text{ .... (1)}$$

ପୁନଶ୍ଚ OMP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \text{ .... (2)}$$

(1) ଓ (2) ରୁ $\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta$

ସେହିପରି $\cos(180^0 - \theta) = \frac{x}{r}$ ଏବଂ ΔOMP ରେ $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ । ମାତ୍ର ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ଋଣାତ୍ମକ ହେତୁ $\cos(180^0 - \theta) = \frac{x}{r} = \frac{-OM}{OP}$ । ସୁତରାଂ $\cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\tan(180^0 - \theta) = \frac{\sin(180^0 - \theta)}{\cos(180^0 - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta,$

$$\cot(180^0 - \theta) = \frac{\cos(180^0 - \theta)}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

$\sec(180^0 - \theta) = \frac{1}{\cos(180^0 - \theta)} = \frac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$ ଏବଂ

$$\text{cosec}(180^0 - \theta) = \frac{1}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta$$

ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ θ ର ମୂଲ୍ୟ 0^0 ରୁ 180^0 ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ମୂଲ୍ୟ ନିମନ୍ତେ (tan ଓ sec କ୍ଷେତ୍ରରେ $\theta \neq 90^0$ ପାଇଁ) ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ସୂତ୍ର - **B**

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(180^0-\theta) = \sin\theta,\ 0^0 \le \theta \le 180^0 \\ \cos(180^0-\theta) = -\cos\theta,\ 0^0 \le \theta \le 180^0 \\ \tan(180^0-\theta) = -\tan\theta,\ 0^0 \le \theta \le 180^0 \quad \theta \ne 90^0 \\ \cot(180^0-\theta) = -\cot\theta,\ 0^0 < \theta < 180^0 \\ \sec(180^0-\theta) = -\sec\theta,\ \theta \ne 90^0,\ 0^0 \le \theta \le 180^0 \\ \text{cosec}(180^0-\theta) = \text{cosec}\,\theta,\ 0^0 < \theta < 180^0 \end{array}}$$

4.7 ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ θ ଓ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ($90^0+\theta$) ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ଯଦି θ ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହୁଏ $90^0+\theta$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେବ । ଯେହେତୁ ଏହି ସ୍ଥୂଳକୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତରେ ମାନ $(180^0-\theta)$ ଓ $(90^0-\theta)$ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ତେଣୁ ଏହାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ । $(90^0+\theta)$ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମାନ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

$$\sin(90^0+\theta) = \sin\{180^0-(90^0-\theta)\} = \sin(90^0-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^0+\theta) = \cos\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\cos(90^0-\theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(90^0+\theta) = \tan\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\tan(90^0-\theta) = -\cot\theta$$
$$\cot(90^0+\theta) = \cot\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\cot(90^0-\theta) = -\tan\theta$$
$$\sec(90^0+\theta) = \sec\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\sec(90^0-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$$
$$\text{cosec}(90^0+\theta) = \text{cosec}\{180^0-(90^0-\theta)\} = \text{cosec}(90^0-\theta) = \sec\theta$$

ସୂତ୍ର - **C**

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(90^0+\theta) = \cos\theta,\ 0^0 \le \theta \le 90^0 \\ \cos(90^0+\theta) = -\sin\theta,\ 0^0 \le \theta \le 90^0 \\ \tan(90^0+\theta) = -\cot\theta,\ 0^0 < \theta \le 90^0 \\ \cot(90^0+\theta) = -\tan\theta,\ 0^0 \le \theta < 90^0 \\ \sec(90^0+\theta) = -\text{cosec}\,\theta,\ 0 < \theta \le 90^0 \\ \text{cosec}(90^0+\theta) = \sec\theta,\ 0^0 \le \theta < 90^0 \end{array}}$$

4.8 କେତକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

$\theta = 30^0, 45^0, 60^0$ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥିଲା । ଏମାନଙ୍କ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ତଥ୍ୟମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା $\theta = 120^0, 135^0$ ଓ 150^0 ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ସବୁ ମଧ୍ୟ ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଏହାର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ କରାଯାଉଛି ।

(i) θ **= 120⁰**

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ଏବଂ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\therefore \sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^0 = \tan(180^0 - 60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

$\cot 120^0 = \frac{1}{\tan 120^0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec 120^0 = \frac{1}{\cos 120^0} = -2$ ଏବଂ

$\text{cosec } 120^0 = \frac{1}{\sin 120^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) θ **= 135⁰**

ଏଠାରେ $\theta = 180^0 - 45^0$ ଏବଂ ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ -

$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^0 = 1$

$\therefore \sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\tan 135^0 = -\tan 45^0 = -1$

[$\sin(180^0 - \theta)$, $\cos(180^0 - \theta)$, $\tan(180^0 - \theta)$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି]

$\cot 135^0 = \frac{1}{\tan 135^0} = -1$; $\sec 135^0 = \frac{1}{\cos 135^0} = -\sqrt{2}$

ଏବଂ $\text{cosec } 135^0 = \frac{1}{\sin 135^0} = \sqrt{2}$

(iii) θ **= 150⁰**

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^0 = -\tan 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 150^0 = \frac{1}{\tan 150^0} = -\sqrt{3}$

$\sec 150^0 = \frac{1}{\cos 150^0} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ ଏବଂ $\text{cosec } 150^0 = \frac{1}{\sin 150^0} = 2$

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜଣା ଥିବା ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ

$\theta =$	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
0^0	0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90^0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1
120^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
135^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
180^0	0	-1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	-1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ - 1 : $\dfrac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1+\cos 60^0 + \sin 30^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $$\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1+\cos 60^0 + \sin 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2\text{x}\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 2 : $\dfrac{\cos 70^0}{\sin 20^0} + \dfrac{\cos 55^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 85^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $$\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0} + \frac{\cos 55^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 85^0}$$

$$= \frac{\cos(90^0 - 20^0)}{\sin 20^0} + \frac{\cos(90^0 - 35^0).\operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan(90^0 - 25^0) . \tan(90^0 - 5^0)}$$

$$= \frac{\sin 20^0}{\sin 20^0} + \frac{\sin 35^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \cot 25^0 . \cot 5^0}$$

$$= 1 + \frac{\sin 35^0 \times \frac{1}{\sin 35^0}}{(\tan 5^0 \times \cot 5^0) \times (\tan 25^0 \times \cot 25^0)} = 1 + \frac{1}{1 \times 1} = 1+1 = 2$$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\text{cosec}\, 48^0} = 2$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= 3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\text{cosec}\, 48^0} = 3\frac{\sin(90^0 - 28^0)}{\cos 28^0} - \frac{\sec(90^0 - 48^0)}{\text{cosec}\, 48^0}$

$= 3\frac{\cos 28^0}{\cos 28^0} - \frac{\text{cosec}\, 48^0}{\text{cosec}\, 48^0} = 3 - 1 = 2 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 : ଯଦି A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଏବଂ $\sin A = \cos B$ ହୁଏ

ତେବେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $A + B = 90^0$

ସମାଧାନ : B ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେତୁ $(90^0 - B)$ ମଧ୍ୟ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin A = \cos B \Rightarrow \sin A = \sin(90^0 - B)$

$\Rightarrow A = 90^0 - B \Rightarrow A + B = 90^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

[**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :** A ଓ B ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେଲେ $\sin A = \sin B \Rightarrow A = B$ ଏବଂ ସେହିପରି $\cos A = \cos B \Rightarrow A = B$ ଇତ୍ୟାଦି । କିନ୍ତୁ A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ହେଲେ ଏହା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ଯେପରି : $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0$ କିନ୍ତୁ $60^0 \neq 120^0$ (ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଏ ବିଷୟରେ ଅଧିକ ଜାଣିବ)**]** ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ସରଳ କର : $\frac{1 + \sec(180^0 - A)}{1 + \sec(90^0 + A)} \times \frac{1 - \text{cosec}\, A}{1 - \sec A}$

ସମାଧାନ : $\frac{1 + \sec(180^0 - A)}{1 + \sec(90^0 + A)} \times \frac{1 - \text{cosec}\, A}{1 - \sec A} = \frac{1 - \sec A}{1 - \text{cosec}\, A} \times \frac{1 - \text{cosec}\, A}{1 - \sec A} = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : $\text{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\text{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$

$= \text{cosec}^2[\,90^0 + (7^0 + \alpha)\,] - \cot^2[\,90^0 - (7^0 + \alpha)\,]$

$= \sec^2(7^0 + \alpha) - \tan^2(7^0 + \alpha)$

$= 1$ (ଉତ୍ତର)

ବି.ଦ୍ର.: $\cot^2(83^0 - \alpha) = [\cot\{180^0 - (97^0 + \alpha)\}]^2 = [-\cot(97^0 + \alpha)]^2 = \cot^2(97^0 + \alpha)$ ନିଆଯାଇ ସରଳ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ -7 : $\dfrac{\sin(180^0-A).\sin(90^0-A).\cot(90^0+A)}{\tan(180^0-A).\cos(90^0+A).\text{cosec}(90^0-A)}$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{\sin(180^0-A).\sin(90^0-A).\cot(90^0+A)}{\tan(180^0-A).\cos(90^0+A).\text{cosec}(90^0-A)} = \dfrac{\sin A.\cos A.(-\tan A)}{-\tan A.(-\sin A).\sec A}$

$= \dfrac{-\sin A.\cos A.\tan A}{\tan A.\sin A.\sec A} = \dfrac{-\cos A}{\sec A} = -\cos^2 A$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -8 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 \ldots\ldots\ldots \tan 89^0 = 1$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ $= \tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 \ldots\ldots\ldots \tan 89^0$

$= \tan(90^0-89^0) . \tan(90^0-88^0) . \tan(90^0-87^0)$

$\ldots\ldots\ldots \tan(90^0-46^0) . \tan 45^0 \ldots\ldots\ldots \tan 87^0 . \tan 88^0 . \tan 89^0$

$= \cot 89^0 . \cot 88^0 . \cot 87^0 \ldots. \cot 46^0 . \tan 45^0 . \tan 46^0 \ldots \tan 87^0 . \tan 88^0 . \tan 89^0$

$= (\cot 89^0 \times \tan 89^0) \times (\cot 88^0 \times \tan 88^0) \times (\cot 87^0 \times \tan 87^0)$

$\ldots\ldots \times (\cot 46^0 \times \tan 46^0) \times \tan 45^0$

$= 1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots \times 1 \times 1 = 1 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ-9: Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

ସମାଧାନ : A, B ଏବଂ C ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣ ହେତୁ $A + B + C = 180^0$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{A+B+C-A}{2}\right)$

$= \sin\left(\dfrac{180^0-A}{2}\right) = \sin\left(90^0-\dfrac{A}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

(‘କ’ ବିଭାଗ)

1. **ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।**

(a) $\sin 80^0 = \ldots\ldots\ldots$ [$\sin 10^0, \sin 20^0, \cos 10^0, \cos 20^0$]

(b) $\cos 65^0 = \ldots\ldots\ldots$ [$\sin 25^0, \sin 35^0, \cos 25^0, \cos 35^0$]

(c) $\sin 180^0 = \ldots\ldots\ldots$ [$1, -1, 0, \pm 1$]

(d) $\cos 90^0 = \ldots\ldots\ldots$ [$1, -1, 0, \pm 1$]

(e) $\cos 110^0 + \sin 20^0 = \ldots\ldots\ldots$ [$2\cos 110^0, 2\sin 20^0, 0, 1$]

(f) $\sin 75^0 - \cos 15^0 = \ldots\ldots\ldots$ [$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1$]

(g) $\sin 0^0$ = ... [$\cos 0^0$, $\sin 90^0$, $\sin 180^0$, $\cos 180^0$]

(h) $\sin 15^0 + \cos 105^0$ = ... [0, 1, – 1, ± 1]

(i) $\cos 121^0 + \sin 149^0$ = ... [1, – 1, 0, ± 1]

(j) $\tan 102^0 - \cot 168^0$ = ... [0, –1, 1, ± 1]

2. $90^0 + \theta$ କିମ୍ବା $90^0 - \theta$ କିମ୍ବା $180^0 - \theta$, ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ($0^0 < \theta < 90^0$)।

(i) $\sin 111^0$ (ii) $\cos 122^0$ (iii) $\tan 99^0$ (iv) $\cot 101^0$

(v) $\sin 91^0$ (vi) $\operatorname{cosec} 93^0$ (vii) $\cos 128^0$ (viii) $\operatorname{cosec} 132^0$ (ix) $\cot 131^0$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ 0^0 ଏବଂ 45^0 କୋଣ ପରିମାଣ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\cos 85^0 + \cot 85^0$ (ii) $\sin 75^0 + \tan 75^0$ (iii) $\cot 65^0 + \tan 49^0$

4. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\frac{\tan 26^0}{\cot 64^0}$ iii) $\frac{\sin 116^0}{\cos 26^0}$ iv) $\frac{\operatorname{cosec} 74^0}{\operatorname{cosec} 106^0}$ v) $\frac{\sin 28^0}{\cos 118^0}$

(‘ଖ’ ବିଭାଗ)

5. ସରଳ କର :-

(i) $\operatorname{cosec} 31^0 - \sec 59^0$ (ii) $\sin(50^0 + \theta) - \cos(40^0 - \theta)$

(iii) $\frac{\cos^2 20^0 + \cos^2 70^0}{\sin^2 59^0 + \sin^2 31^0}$ (iv) $\tan(55^0 - \theta) - \cot(35^0 + \theta)$

(v) $\cos 1^0 . \cos 2^0 .... \cos 180^0$ (vi) $\left(\frac{\sin 27^0}{\cos 63^0}\right)^2 + \left(\frac{\cos 63^0}{\sin 27^0}\right)^2$

(vii) $\cot 112^0 . \cot 158^0$ (viii) $\cos^2(90^0 + \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha)$

(ix) $\sec^2(105^0 + \alpha) - \tan^2(75^0 - \alpha)$ (x) $\sin^2(110^0 + \alpha) + \cos^2(70^0 - \alpha)$

6. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\operatorname{cosec}^2 67^0 - \tan^2 23^0$ (ii) $\frac{\sin 51^0 + \sin 156^0}{\cos 39^0 + \cos 66^0}$

(iii) $\frac{\cos 68^0 + \sin 131^0}{\sin 22^0 + \cos 41^0}$ (iv) $\frac{\sin 162^0 + \cos 153^0}{\cos 72^0 - \cos 27^0}$

(v) $\frac{\cos 38^0 + \sin 120^0}{2\sin 52^0 + \sqrt{3}}$ (vi) $\frac{2\cos 67^0}{\sin 23^0} - \frac{\tan 40^0}{\cot 50^0} - \sin 90^0$

(vii) $\frac{\sec 61^0 + \operatorname{cosec} 120^0}{\sqrt{3}\operatorname{cosec} 29^0 + 2}$

7. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos(90^0 - \theta) . \text{cosec}(180^0 - \theta) = 1$

(ii) $\dfrac{\cos 29^0 + \sin 159^0}{\sin 61^0 + \cos 69^0} = 1$ (iii) $\sin^2 70^0 + \cos^2 110^0 = 1$

(iv) $\sin^2 110^0 + \sin^2 20^0 = 1$ (v) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2(180^0 - \theta) = \sec^2\theta . \text{cosec}^2\theta$

(vi) $2\sin\theta . \sec(90^0 + \theta) . \sin 30^0 . \tan 135^0 = 1$

8. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos^2 135^0 - 2\sin^2 180^0 + 3\cot^2 150^0 - 4\ \text{tna}^2 120^0 = \dfrac{-5}{2}$

(ii) $\tan 30^0 . \tan 135^0 . \tan 150^0 . \tan 45^0 = 1$

(iii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\text{cosec}^2 90^0 + \cot 120^0} = 1$

(iv) $\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 120^0 + \tan^2 150^0 = \dfrac{1}{3}$

('ଗ' ବିଭାଗ)

9. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର :

(i) $\tan 10^0 \times \tan 20^0 \times \tan 30^0 \times .... \times \tan 70^0 \times \tan 80^0$

(ii) $\cot 12^0 . \cot 38^0 . \cot 52^0 . \cot 60^0 . \cot 78^0$

(iii) $\tan 5^0 . \tan 15^0 . \tan 45^0 . \tan 75^0 . \tan 85^0$

10. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\sin 120^0 + \tan 150^0 . \cos 135^0 = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

(ii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\text{cosec}^2 90^0 + \cot 120^0} = 2 - \sqrt{3}$

(iii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 45^0}{\text{cosec}^2 90^0 - \cot 120^0} = 3 - \sqrt{3}$

11. ସରଳ କର :

(i) $\sin(180^0 - \theta) . \cos(90^0 + \theta) + \sin(90^0 + \theta) . \cos(180^0 - \theta)$

(ii) $\dfrac{\cos(90^0 - A) . \sec(180^0 - A) . \sin(180^0 - A)}{\sin(90^0 + A) . \tan(90^0 + A) . \text{cosec}(90^0 + A)}$

12. Δ ABC ରେ $m\angle B = 90^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin^2 A + \sin^2 C = 1$

13. Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\cos(A+B) + \sin C = \sin(A + B) - \cos C$ ।

14. A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ହେଲେ $\sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ $\tan A + \tan C$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 150^0 + \tan^2 150^0}{\sin^2 120^0 - \cos^2 150^0 + \tan^2 120^0 + \tan^2 135^0 - \cos 180^0} = \dfrac{5}{18}$

17. ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{5\sin^2 150^0 + \cos^2 45^0 + 4\tan^2 120^0}{2\sin 30^0 . \cos 60^0 - \tan 135^0} = \dfrac{55}{6}$

4.9. ମିଶ୍ରକୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ (Trigonometrical ratios of compound angles) :

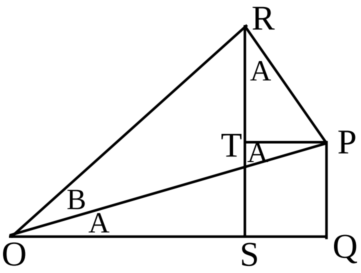
ଯଦି A ଓ B ଉଭୟ ଚଳରାଶି ଓ $\theta = A + B$ ବା $A - B$ ହୁଏ, ତେବେ θ ର ମୂଲ୍ୟ ଉଭୟ A ଓ B ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବ । A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବା ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ θ ମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ θ ଅର୍ଥାତ୍ $A + B$ ବା $A - B$ କୁ ଯୌଗିକ ଚଳ (Compound argument) କୁହାଯାଏ ।

ଯୌଗିକ ଚଳ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିଶେଷ ଧର୍ମ ରହିଛି । ସେଥିମଧ୍ୟରୁ କେତେକ ପ୍ରମୁଖ ଧର୍ମକୁ ସୂତ୍ର ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

ସୂତ୍ର : $\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ .... (1)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.1 ରେ $\angle QOP$ ଓ $\angle POR$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B, ତେଣୁ $\angle QOR$ ର ପରିମାଣ $A + B$ ଅଟେ ।

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ଏବଂ $\overline{PT} \perp \overline{RS}$, $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$



(ଚିତ୍ର 4.6)

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଅଟେ ।

ତେଣୁ $\overline{PT} \parallel \overline{OQ}$ ଏବଂ

$m\angle TPO = m\angle POQ = A$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ) .... (i)

RTP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PRT + m\angle TPR = 90^0$

$\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ହେତୁ $m\angle TPO + m\angle TPR = 90^0$

$\therefore m\angle PRT + m\angle TPR = m\angle TPO + m\angle TPR$

ତେଣୁ $m\angle PRT = m\angle TPO = A$ [(i) ଅନୁଯାୟୀ] .... (ii)

$$\therefore \sin(A + B) = \frac{RS}{OR} = \frac{RT + TS}{OR} = \frac{RT + PQ}{OR} = \frac{PQ}{OR} + \frac{RT}{OR} \quad (\because TS = PQ)$$

$$= \frac{PQ}{OP} . \frac{OP}{OR} + \frac{RT}{RP} . \frac{RP}{OR}$$

$$= \sin\angle QOP \,.\, \cos\angle POR + \cos\angle PRT \,.\, \sin\angle POR$$

$$= \sin A.\cos B + \cos A \,.\, \sin B$$

[$\because m\angle QOP = A = m\angle PRT$ ...... (ii)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) $\sin A$ କୁ $\sin m\angle QOP$ ଅଥବା $\sin m\angle PRT$ ନ ଲେଖି $\sin\angle QOP$ ଅଥବା $\sin\angle PRT$ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି $\cos A$ କୁ $\cos m\angle QOP$ ଅଥବା $\cos m\angle PRT$ ନ ଲେଖି $\cos\angle QOP$ ଅଥବା $\cos\angle PRT$ ଲେଖାଯାଏ । ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ପ୍ରଥା ଅନୁସୃତ ହୁଏ ।

(2) $\angle PRT$ ଓ $\angle QOP$ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ PRT ବା QOP ଯେକୌଣସି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା । ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହୋଇଥିବାରୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ଅଟନ୍ତି - ଏକଥା ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି ।

ସୂତ୍ର : $\cos(A + B) = \cos A \,.\, \cos B - \sin A \,.\, \sin B$ ..... (2)

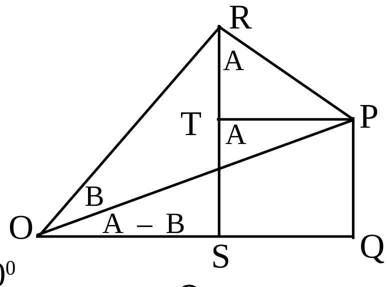
ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.1 ରୁ $\cos(A+B) = \dfrac{OS}{OR} = \dfrac{OQ - SQ}{OR} = \dfrac{OQ - TP}{OR}$

$$= \frac{OQ}{OR} - \frac{TP}{OR} = \frac{OQ}{OP}\cdot\frac{OP}{OR} - \frac{TP}{RP}\cdot\frac{RP}{OR}$$

$= \cos A \,.\, \cos B - \sin A \,.\, \sin B$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\sin(A - B) = \sin A \,.\cos B - \cos A \,.\, \sin B$ ....(3)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.2 ରେ $m\angle QOR = A$, $m\angle POR = B$, ତେଣୁ $\angle QOP = A - B$



(ଚିତ୍ର 4.7)

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{PR} \perp \overline{OR}$, $\overline{PT} \perp \overline{RS}$ ଓ $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ତେଣୁ $PQ = TS$ ଓ $SQ = TP$

$\angle ROS$ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle ROS + m\angle ORS = 90^0$

ପୁନଶ୍ଚ $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ ହେତୁ $m\angle PRT + m\angle ORS = 90^0$

$\therefore m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ($\because m\angle ROS = m\angle QOR = A$)

$\sin(A - B) = \sin\angle QOP = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{TS}{OP}$ ($\because PQ = TS$)

$$= \frac{RS - RT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{RT}{OP} = \frac{RS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{RT}{RP} \cdot \frac{RP}{OP}$$

$= \sin\angle ROS \ . \ \cos\angle POR \ - \ \cos\angle PRT \ . \ \sin\angle POR$

$= \sin A \ . \ \cos B \ - \ \cos A \ . \ \sin B$

($\because$ $m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\cos(A - B) = \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$ ....(4)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.2 ରେ $\cos(A - B) = \cos\angle QOP$

$$= \frac{OQ}{OP} = \frac{OS + SQ}{OP} = \frac{OS + TP}{OP} \ (\because \ SQ = TP)$$

$$= \frac{OS}{OP} + \frac{TP}{OP} = \frac{OS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} + \frac{TP}{RP} \cdot \frac{RP}{OP}$$

$= \cos\angle ROS \ . \ \cos\angle POR \ + \ \sin\angle PRT \ . \ \sin\angle POR$

$= \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$

($\because$ $m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂଚନା : ସୂତ୍ର -1ରୁ ସୂତ୍ର -4 ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏହାକୁ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ବାଞ୍ଛନୀୟ; କାରଣ ଏହାପରେ ଆଲୋଚିତ ହେବାକୁ ଥିବା ବିଷୟବସ୍ତୁ ପାଇଁ ଏହି ଚାରିଗୋଟି ସୂତ୍ର ହିଁ ଆଧାର । ଏହି ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଆଧାରିତ ହୋଇଥିଲେ ହେଁ A ଓ B ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ - ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଦିଆଯିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ $\tan(A \pm B)$ ଏବଂ $\cot(A \pm B)$ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ :-10

(i) $$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ cosA .cosB ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}$$

$$\therefore \ \mathbf{\tan \ (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}}$$

(ii) $\tan\ (A - B) = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ cosA .cosB ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \, . \, \tan B}$$

$$\therefore \ \mathbf{\tan \ (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \, . \, \tan B}}$$

(iii) $\cot\ (A + B) = \dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\dfrac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \dfrac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\therefore \ \mathbf{\cot \ (A + B) = \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}}$$

(iv) $\cot\ (A - B) = \dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)} = \dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\dfrac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A} \qquad \therefore \ \mathbf{\cot \ (A - B) = \frac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A}}$$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଆଲୋଚିତ୍ର ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉପ-ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନିଜେ ସ୍ଥିର କର ।

(a) $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A . \cos B$

(b) $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A . \sin B$

(c) $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A . \cos B$

(d) $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A . \sin B$

ଉଦାହରଣ - 11 : $\sin 15^0$ ଓ $\tan 105^0$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0)$

$$= \sin 45^0 . \cos 30^0 - \cos 45^0 . \sin 30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ (ଉତ୍ତର)}$$

$$\tan 105^0 = \tan(60^0 + 45^0) = \frac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 60^0 . \tan 45^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3} \text{ (ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ - 12 : ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} = \tan A + \tan B$

ସମାଧାନ : ବାମପାକ୍ଷ $= \frac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} = \frac{\sin A . \cos B + \cos A . \sin B}{\cos A . \cos B}$

$$= \frac{\sin A . \cos B}{\cos A . \cos B} + \frac{\cos A . \sin B}{\cos A . \cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \tan A + \tan B = \text{ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।}$$

ଉଦାହରଣ - 13 : ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} = \tan 61^0$

ସମାଧାନ : ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= \tan 61^0 = \tan(45^0 + 16^0)$

$$= \frac{\tan 45^0 + \tan 16^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 16^0} = \frac{1 + \tan 16^0}{1 - \tan 16^0} = \frac{1 + \frac{\sin 16^0}{\cos 16^0}}{1 - \frac{\sin 16^0}{\cos 16^0}} = \frac{\frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0}}{\frac{\cos 16^0 - \sin 16^0}{\cos 16^0}}$$

$$= \frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} = \text{ବାମପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।}$$

ଉଦାହରଣ - 14 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan 70^0 . \tan 65^0 - \tan 70^0 - \tan 65^0 = 1$

ସମାଧାନ : $70^0 + 65^0 = 135^0 \Rightarrow \tan(70^0 + 65^0) = \tan 135^0$

$$\Rightarrow \frac{\tan 70^0 + \tan 65^0}{1 - \tan 70^0 . \tan 65^0} = -1$$

$\Rightarrow -1 + \tan 70^0 . \tan 65^0 = \tan 70^0 + \tan 65^0$

$\Rightarrow \tan 70^0 . \tan 65^0 - \tan 70^0 - \tan 65^0 = 1$

$\Rightarrow$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 15 : $A+B+C = 180^0$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

ସମାଧାନ : $A+B+C = 180^0 \Rightarrow A+B = 180^0 - C$

$$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(180^0 - C) \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B} = -\tan C$$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A . \tan B . \tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C \Rightarrow$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 16 : ପ୍ରମାଣ କର : $\cos 70^0 + \cos 50^0 = \sin 80^0$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ = $\cos 70^0 + \cos 50^0$

$= \cos(60^0 + 10^0) + \cos(60^0 - 10^0)$

$= \cos 60^0.\cos 10^0 - \sin 60^0.\sin 10^0 + \cos 60^0.\cos 10^0 + \sin 60^0.\sin 10^0$

$= 2\cos 60^0.\cos 10^0 = 2 \times \frac{1}{2} \cos 10^0$

$= \cos 10^0 = \cos(90^0 - 80^0) = \sin 80^0$

= ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

('କ' ବିଭାଗ)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

i) $\sin(A - B) = \frac{\sin A}{......} - \frac{\cos A}{......}$ ।

ii) $\cos(\theta + \alpha) + \cos(\alpha - \theta) =$ .... ।

iii) $\cos(60^0 - A) +$ .... $= \cos A$ ।

iv) $\sin(30^0 + A) + \sin(30^0 - A) =$ ...... ।

v) $2 \sin A. \sin B =$ .... $- \cos(A + B)$ ।

vi) $\tan(45^0 + \theta) . \tan(45^0 - \theta) =$ .... ।

'ଖ' ବିଭାଗ

2. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\dfrac{\sin(A - B)}{\cos A.\cos B} = \tan A - \tan B$ ii) $\dfrac{\cos(A + B)}{\cos A.\cos B} = 1 - \tan A \,.\, \tan B$

iii) $\dfrac{\cos(A - B)}{\cos A.\sin B} = \cot B + \tan A$ iv) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta.\cos\beta}$

v) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\beta.\cos\beta}$

3. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\cos(A + 45^0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$ ii) $\sin(45^0 - \theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta - \cos\theta)$

iii) $\tan(45^0 + \theta) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ iv) $\cot(45^0 + \theta) = \dfrac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$

4. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\cos(45^0 - A) \,.\, \cos(45^0 - B) - \sin(45^0 - A) \,.\, \sin(45^0 - B) = \sin(A + B)$

ii) $\sin(40^0 + A) \,.\, \cos(20^0 - A) + \cos(40^0 + A) \,.\, \sin(20^0 - A) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $\cos(65^0 + \theta) \,.\, \cos(35^0 + \theta) + \sin(65^0 + \theta) \,.\, \sin(35^0 + \theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

iv) $\cos n\theta \,.\, \cos\theta + \sin n\theta \,.\, \sin n\theta = \sin(n - 1)\theta$

v) $\tan(60^0 - A) = \dfrac{\sqrt{3}\cos A - \sin A}{\cos A + \sqrt{3}\sin A}$

'ଗ' ବିଭାଗ

5. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\tan 62^0 = \dfrac{\cos 17^0 + \sin 17^0}{\cos 17^0 - \sin 17^0}$ (ii) $\dfrac{\cos 25^0 + \sin 25^0}{\cos 25^0 - \sin 25^0}$

(iii) $\tan 7A \,.\, \tan 4A \,.\, \tan 3A = \tan 7A - \tan 4A - \tan 3A$

(iv) $\tan(x + y) - \tan x - \tan y = \tan(x + y) \,.\, \tan x \,.\, \tan y$

(v) $(1 + \tan 15^0)(1 + \tan 30^0) = 2$

(vi) $(\cot 10^0 - 1)(\cot 35^0 - 1) = 2$

(vii) $\dfrac{1}{\cot A + \tan A} - \dfrac{1}{\tan A + \cot B} = \tan(A - B)$

(viii) $\sqrt{3} + \cot 50^0 + \tan 80^0 = \sqrt{3}\cot 50^0 \,.\, \tan 80^0$

6. $\cos 75^0$ ଓ $\sin 15^0$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. (i) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ ଓ $\sin\beta = \frac{5}{13}$ ହେଲେ $\sin(\alpha - \beta)$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $\tan A = \frac{1}{2}$, $\cot B = 3$ ହେଲେ $A + B$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $\tan\beta = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ ହେଲେ, $\tan(\alpha + \beta)$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. $A + B + C = 90^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A . \cot B . \cot C$

(ii) $\tan A . \tan B + \tan B . \tan C + \tan C . \tan A = 1$

9. (i) $A + B + C = 180^0$ ଏବଂ $\sin C = 1$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan A . \tan B = 1$

(ii) $A + B + C = 180^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cot .\cot B + \cot B.\cot C + \cot C . \cot A = 1$

(iii) $A + B + C = 180^0$ ଏବଂ $\cos A = \cos B . \cos C$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$

(b) $\tan B. \tan C = 2$

10. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (i) $\sin(A+B) .\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\cos(A + B) . \cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

11. ପ୍ରମାଣ କର : (i) $\sin 50^0 + \sin 40^0 = \sqrt{2}\ \sin 85^0$

(ii) $\cos 50^0 + \cos 40^0 = \sqrt{2}\ \cos 5^0$

(iii) $\sin 50^0 - \sin 70^0 + \sin 10^0 = 0$

12. ସମାଧାନ କର : (i) $\sin(A + B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(A-B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cos(A + B) = -\frac{1}{2}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

(iii) $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot(A + B)$,

(iv) $\tan(A + B) = -1$, $\operatorname{cosec}(A-B) = \sqrt{2}$

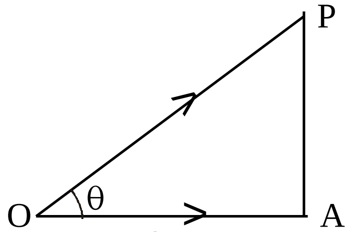
4.10 ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା (Heights and distances) :

ଗଣିତ ପାଠକୁ ସୁଖପ୍ରଦ କରିବା ପାଇଁ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦିଗ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବା ଉଚିତ୍ । ପ୍ରତ୍ୟେକ୍ଷ ମାପ ନ କରି **ପଠାଣି ସାମନ୍ତ** ଏକ ନଳୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ଶୀର୍ଷ ଦେଶକୁ ନିରୀକ୍ଷଣ କରି ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରୁଥିଲେ । ଏହା ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଗଣିତର ଏକ ନମୁନା । ଆସ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ବାସ୍ତବ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

କେତେକ ସ୍ଥଳରେ ଯନ୍ତ୍ରୀମାନେ ପାହାଡ଼, ମନ୍ଦିର ପ୍ରଭୃତିର ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ନଦୀର ଦୁଇ ବିପରୀତ ଧାରରେ ଥିବା ବସ୍ତୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ମାପଫିତା ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରନ୍ତି ନାହିଁ । ତ୍ରିକୋଣମିତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ଏପରି ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ । ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପୂର୍ବରୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେତୋଟି ତତ୍ତ୍ୱ ସହିତ ଅବଗତ ହେବା ଦରକାର ।

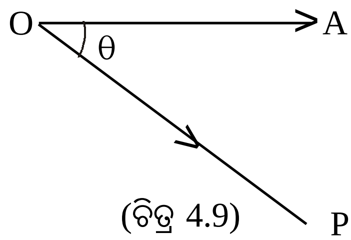
1. ପୃଥିବୀ ଏକ ଗୋଲାକାର ବସ୍ତୁ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଏହାର ବିଶାଳତା ହେତୁ ଏହାର ପୃଷ୍ଠର ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଅଂଶକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ବୋଲି ଧରିପାରିବା । ଏହି **ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ ଯେ କୌଣସି ସରଳରେଖାକୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା** କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{OA}$ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରେଖା ।



(ଚିତ୍ର 4.8)

2. ଚିତ୍ରରେ O ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଦର୍ଶକର ଚକ୍ଷୁ, ଅଧିକ ଉଚ୍ଚରେ ଥିବା ଏକ ବସ୍ତୁ P ଦିଗରେ ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପ କରୁଥିବାର ଦେଖାଯାଉଛି । $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଲମ୍ବ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OP}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ P ବିନ୍ଦୁର **କୌଣିକ ଉନ୍ନତି (Angle of elevation)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ପରିମାଣ θ ଅଟେ ।

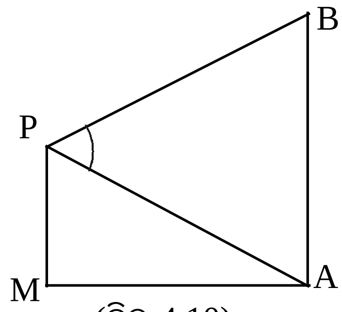


(ଚିତ୍ର 4.9)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଚକ୍ଷୁର ଅବସ୍ଥିତି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଏଠାରେ ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପର ଦିଗ $\overrightarrow{OP}$ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଲମ୍ବ ସମତଳରେ $\overrightarrow{OA}$ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OP}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OA}$ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ P ବିନ୍ଦୁର **କୌଣିକ ଅବନତି (Angle of depression)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ପରିମାଣ θ ଅଟେ ।

ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପର ଦିଗ ଓ ଏହାର ଲମ୍ବ ସମତଳରେ ଥିବା ଚକ୍ଷୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ଦୃଷ୍ଟିବଦ୍ଧ ବସ୍ତୁର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ବା କୌଣିକ ଅବନତି କୁହାଯାଏ । **ସେକ୍ସ୍‌ଟାଣ୍ଟ (sextant)** ବା **ଥିଓଡୋଲାଇଟ୍ (Theodolite)** ଯନ୍ତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ବା ଅବନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ । ଏହି କୋଣର ମାପ ବ୍ୟବହାର କରି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀଦ୍ୱାରା ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁର୍ଗ, ପାହାଡ଼ ଓ ଅଟ୍ଟାଳିକା ପ୍ରଭୃତିର ଦୂରତା ବା ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କରିହେବ ।

କୌଣସି ବସ୍ତୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ :



(ଚିତ୍ର 4.10)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{PM}$ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ । $\overline{BA}$ ଏକ ମନ୍ଦିର । ମନ୍ଦିରର ପ୍ରାନ୍ତ ଓ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{PM}$ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ P କୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସହ ଯୋଗ କରାଯାଇଛି । $\overline{AB}$ ମନ୍ଦିରଟି P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ∠APB ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବାର କୁହାଯାଏ ।

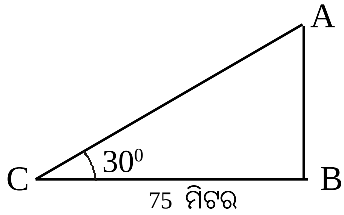
ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା ସମ୍ପର୍କିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ସହଜରେ କରାଯାଇପାରେ । ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 17 :

ଏକ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ପାଦଦେଶଠାରୁ 75 ମିଟର ଦୂରରେ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3}$ = 1.732)

ସମାଧାନ : $\overline{BC}$ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ରେଖାଖଣ୍ଡ, BA ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା ଓ A ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଶୀର୍ଷ ହେଉ ।

ଏଠାରେ BC = 75 ମିଟର ଓ $m\angle BCA = 30^0$ ।



(ଚିତ୍ର 4.11)

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$\tan 30^0 = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BA}{75}$ କିମ୍ବା BA = 75 tan 30

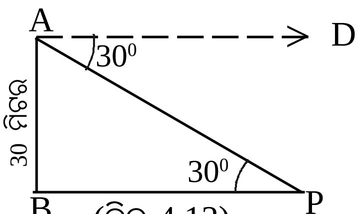
$= 75 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 75 \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 25\sqrt{3} = 25 \times 1.732 = 43.3$ ମିଟର

$\therefore$ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା 43.3 ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 18 :

30 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଗୋଟିଏ ବୃକ୍ଷର ଅଗ୍ରଭାଗରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଓ ବୃକ୍ଷର ପାଦଦେଶରୁ କିଛି ଦୂରରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ବୃକ୍ଷ ପାଦଦେଶରୁ ବିନ୍ଦୁର ଉକ୍ତ ଦୂରତା ସ୍ଥିର କର । (ଦତ୍ତ ଅଛି, $\sqrt{3}$ =1.732)

ସମାଧାନ : BA = ବୃକ୍ଷର ଉଚ୍ଚତା = 30 ମିଟର, $m\angle DAP = 30^0$ ବୃକ୍ଷର ପାଦ ଦେଶ B ରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି P, BP ଦୈର୍ଘ୍ୟଟି ଆବଶ୍ୟକ । ଏଠାରେ ABP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle APB = 30^0$



(ଚିତ୍ର 4.12)

$\therefore \tan 30^0 = \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{30}{BP} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{30}{BP}$

$\therefore$ BP = $30\sqrt{3}$ ମିଟର = (30 x 1.732) ମିଟର

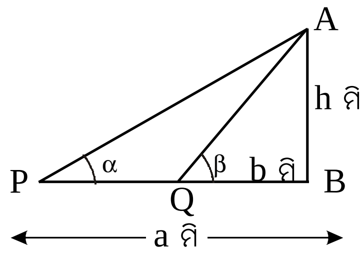
= 51.96 ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 19 : ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ $\overline{AB}$ର ପାଦଦେଶ B ରୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ର B ଠାରୁ ଦୂରତା ଯଥାକ୍ରମେ a ମି ଓ b ମି । P ଓ Q, ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ A ର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ α^0 ଓ β^0 । ଯଦି $\alpha + \beta = 90^0$ ତେବେ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା AB ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର AB = h ମିଟର । ଦତ୍ତ ଅଛି BP = a ମି ଓ BQ = b ମି.,

$\angle APB = \alpha$, $\angle AQB = \beta$ ଏବଂ $\alpha + \beta = 90^0$

AQB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan\beta = \frac{AB}{BQ} = \frac{h}{b}$



(ଚିତ୍ର 4.13)

APB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan\alpha = \frac{AB}{BP} = \frac{h}{a}$

ଆମେ ଜାଣୁ, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha + \tan\beta}$

$$= \frac{\frac{h}{a} + \frac{h}{b}}{1 - \frac{h^2}{ab}} = \frac{h(a+b)}{ab - h^2} \Rightarrow \cot(\alpha+\beta) = \frac{ab - h^2}{h(a+b)}$$

ମାତ୍ର $\cot(\alpha+\beta) = \cot 90^0 = 0$

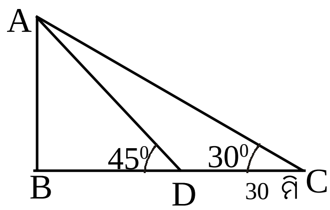
$\therefore\ ab - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{ab}$ ମି. । $AB = h$ ମି.$= \sqrt{ab}$ ମି. (ଉ)

ଉଦାହରଣ – 20 :

ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ଥିବା ବେଳେ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯେତେ, ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ବେଳେ ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ତା’ଠାରୁ 30 ମିଟର କମ୍ । ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3}$ =1.732)

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 11.9 ରେ AB ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା, BD ଓ BC ଯଥାକ୍ରମେ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯେତେବେଳେ ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ଓ 30^0 ଏବଂ $CD = BC - BD = 30$ ମିଟର ।

ମନେକର ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା = AB = x ମିଟର



(ଚିତ୍ର 4.14)

BAD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 45^0 = \frac{x}{BD}$

$\Rightarrow BD = \frac{x}{\tan 45^0} = \frac{x}{1} = x$

ଓ BAC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 30^0 = \frac{x}{BC} \Rightarrow BC = \frac{x}{\tan 30^0} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x\,.\,\sqrt{3}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $BC - BD = DC = 30$ ମି. $\Rightarrow x\sqrt{3} - x = 30$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

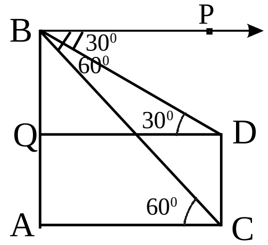
$$= \frac{30(1.732+1)}{(3-1)} = \frac{30 \times 2.732}{2} = 15 \times 2.732 = 40.98$$ ମିଟର

$\therefore$ ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା = 40.98 ମିଟର   (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 21 : ଗୋଟିଏ ପାହାଡ଼ ଉପରୁ 100 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 60^0 । ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର AB = ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ଓ CD ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ସ୍ତମ୍ଭ ।

$\overleftrightarrow{BP}$ ଭୂପୃଷ୍ଠ ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖା ହେଲେ $m\angle PBD = 30^0$ ଓ $m\angle PBC = 60^0$ ଓ CD = 100 ମି.



(ଚିତ୍ର 4.15)

ମନେକର ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା AB = x ମିଟର ଓ $\overline{DQ} \parallel \overline{BP} \parallel \overline{AC}$

$\therefore\ m\angle BCA = 60^0$ ଓ $m\angle BDQ = 30^0$

BQ = AB – AQ = AB – DC = (x – 100) ମି.

BQD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 30^0 = \dfrac{BQ}{QD}$

$$\Rightarrow QD = \frac{BQ}{\tan 30^0} \Rightarrow QD = \frac{x-100}{\tan 30^0} \quad ....(i)$$

BAC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 60^0 = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{AC}{\tan 60^0} \Rightarrow AC = \dfrac{x}{\tan 60^0}$ ....(ii)

ମାତ୍ର QD = AC $\therefore$ (i) ଓ (ii) ରୁ $\dfrac{x-100}{\tan 30^0} = \dfrac{x}{\tan 60^0}$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}(x-100) = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3(x-100) = x \Rightarrow 3x - 300 = x$$

$\Rightarrow 3x - x = 300 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$

$\therefore$ ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା 150 ମିଟର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (c)

(କ - ବିଭାଗ)

($\sqrt{3} = 1.732$)

1. ଗୋଟିଏ ବୃକ୍ଷର ପାଦଦେଶ ସହ ଏକ ସମତଳରେ ଏବଂ ଏହାଠାରୁ 120 ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବୃକ୍ଷର ଅଗ୍ରଭାଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ ବୃକ୍ଷର ଉଚ୍ଚତା ସ୍ଥିର କର ।

2. 27 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ବତୀଘରର ଶୀର୍ଷରୁ ଏକ ଜାହାଜର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ବତୀଘରଠାରୁ ଜାହାଜର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. 2 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ଦର୍ଶକ ଦେଖିଲା ଯେ, 24 ମିଟର ଦୂରରେ ଥିବା ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ ସିଡ଼ି ଏକ କାନ୍ଥର ଶୀର୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ସିଡ଼ିର ପାଦ ଦେଶରୁ କାନ୍ଥର ଦୂରତା 3 ମିଟର । ସିଡ଼ିଟି ଭୂମି ସହ 60^0 ରେ ଆନତ । ସିଡ଼ିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

5. 1.5 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଜଣେ ଦର୍ଶକ ଏକ କୋଠାଘରଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଦେଖିଲା ଯେ, କୋଠାଘରର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 । କୋଠାଘରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 ବେଳେ ଗୋଟିଏ ଗଛର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 15 ମିଟର ଥିଲା । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଖ - ବିଭାଗ)

7. 300 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ପାହାଡ଼ ଉପରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 60^0 ହେଲେ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 ରୁ 45^0 କୁ ହ୍ରାସ ପାଇଥିବାରୁ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲା । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଏକ ସମତଳ ଭୂମି ଉପରେ 40 ମିଟର ବ୍ୟବଧାନରେ ଦୁଇଟି ଖୁଣ୍ଟ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ପୋତା ଯାଇଛି । ଗୋଟିଏ ଖୁଣ୍ଟର ଉଚ୍ଚତା ଅନ୍ୟ ଖୁଣ୍ଟର ଉଚ୍ଚତାର ଦୁଇଗୁଣ । ଖୁଣ୍ଟଦ୍ୱୟ ସେମାନଙ୍କ ପାଦବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ । ଖୁଣ୍ଟ ଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଗଛର ଶୀର୍ଷରୁ ଭୂମି ଉପରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 60^0 ଥିଲା । ସେହି ଗଛର ଶୀର୍ଷରୁ 1.5 ମିଟର ତଳକୁ ଓହ୍ଲାଇ ଆସିଲେ ଉକ୍ତ ବସ୍ତୁରେ କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହୁଏ । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. 10 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଅଗ୍ରଭାଗରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ମନ୍ଦିରର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 45^0 ଓ 30^0 ହୋଇଯାଏ । ମନ୍ଦିରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. 12 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ଏକ ରାସ୍ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଏକ କୋଠାଘର, ଏହାର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଅନ୍ୟ ଏକ ଘରର ଝରକାରେ ଏକ ସମକୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରେ । କୋଠାଘରର ପାଦଦେଶରେ ଝରକାର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ କୋଠାଘରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଜଣେ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ନଦୀ କୂଳରେ ଠିଆ ହୋଇ ଦେଖିଲା ଯେ ନଦୀର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭୂମିରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 । ଦୁର୍ଗ ସହିତ ଏକ ସରଳରେଖାରେ 60 ମିଟର ପଛକୁ ଘୁଞ୍ଚି ଆସି ଦେଖିଲା ଯେ, ଉକ୍ତ କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲା । ନଦୀର ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ ପରସ୍ପରଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରରେ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଗୋଟିକର ଉଚ୍ଚତା ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇଗୁଣ । ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଦେଖିଲେ ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ହୁଏ, ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଗର ପାଦ ଦେଶ ସହ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରୁ ଦୁର୍ଗର ଶୀର୍ଷ ଭାଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 45^0 । ଦୁର୍ଗର ଉଚ୍ଚତା 30 ମିଟର ହେଲେ, ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ଗୋଟିଏ କୋଠାର ଉଚ୍ଚତା 12 ମିଟର । କୋଠାର ଶୀର୍ଷରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ଓ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 60^0 ଓ 30^0 । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ଓ କୋଠାଠାରୁ ସ୍ତମ୍ଭର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।