ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି

(CO-ORDINATE GEOMETRY)

.

6.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ଏବଂ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁସ୍ଥାପନ, ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିରୂପଣ ଏବଂ ଦୁଇଅଜ୍ଞାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେମାନେ ଅବଗତ ଅଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେମାନେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ନିରୂପିତ ଦୁଇ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା, ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର ଏବଂ ସ୍ଥାନଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିଣ୍ଣୟ ର ସୂତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବ । ଉକ୍ତ ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକର ସଫଳ ପ୍ରୟୋଗ କରି କଠିନ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କରିବାରେ ସମର୍ଥ ମଧ୍ୟ ହୋଇ ପାରିବ ।

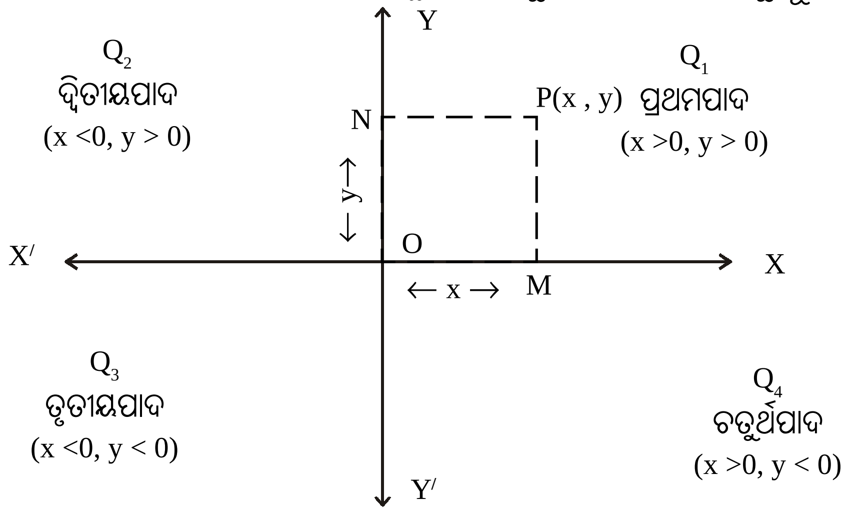
6.2 କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ ଓ କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Cartesian plane and Cartesian co-ordinates) :

ବୀଜଗଣିତରେ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିଛେ । ସେଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇପାରିବ ଏବଂ ବିପରୀତକ୍ରମେ ସରଳରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇପାରିବ । କିନ୍ତୁ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାର ବାହାରେ, ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ସୂଚିତ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । ଏହିପରି ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ପାଇଁ ଆମେ ନିମ୍ନ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରିପାରିବା ।

ମନେକର କାଗଜର ଉପର ପୃଷ୍ଠତଳ ଆମର ଆଲୋଚ୍ୟ ସମତଳ ଓ ଏହି ସମତଳ ଉପରସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ଅବସ୍ଥିତି ଆମେ ନିରୂପଣ କରିବା (ଚିତ୍ର 6.1) । ଏଠାରେ ଆମେ ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'OX}$ ଓ $\overleftrightarrow{Y'OY}$ ନେବା ଯେପରିକି ସେମାନେ ସମକୋଣରେ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ । $\overleftrightarrow{X'OX}$ ଓ $\overleftrightarrow{Y'OY}$ ସଂଖ୍ୟାରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x- ଅକ୍ଷ (x-axis) ଓ y- ଅକ୍ଷ (y-axis) କୁହାଯାଏ ଏବଂ O ବିନ୍ଦୁକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ (Origin) କୁହାଯାଏ । ଯେହେତୁ

ଏହି ସମତଳଟି ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ତେଣୁ ଏହାକୁ RXR ବା R^2– ସମତଳ (R^2-Plane) ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଏହି ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ R^2- ସମତଳକୁ ଚାରିଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ପାଦ (Quadrant) କୁହାଯାଏ । ପ୍ରଥା ଅନୁସାରେ XOY ପାଦକୁ ପ୍ରଥମପାଦ (first quadrant, Q_1), YOX$'$ କୁ ଦ୍ୱିତୀୟପାଦ (Second quadrant, Q_2) X$'$OY$'$ କୁ ତୃତୀୟପାଦ (third quadrant, Q_3) ଓ Y$'$OX କୁ ଚତୁର୍ଥପାଦ (Fourth quadrant, Q_4) କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି $\overline{PM}$ ଲମ୍ବ ଓ y- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି $\overline{PN}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ଯଦି x – ଅକ୍ଷର ଅବସ୍ଥିତି M ବିନ୍ଦୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x କୁ ସୂଚାଏ ଏବଂ y– ଅକ୍ଷରେ



(ଚିତ୍ର 6.1)

ଅବସ୍ଥିତି N ବିନ୍ଦୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା y କୁ ସୂଚାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ OM = NP = x ଏବଂ ON = MP = y, ତେବେ ଆମେ P ବିନ୍ଦୁକୁ ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (ordered pair) (x,y) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରିପାରିବା ଏବଂ ଲେଖିଲାବେଳେ ଆମେ ଏହାକୁ P(x, y) ହିସାବରେ ଲେଖିବା । ।

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x କୁ P ବିନ୍ଦୁର **x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x-co-ordinate) ବା ଭୁଜ (abscissa)** ଏବଂ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା y କୁ P ବିନ୍ଦୁର **y ସ୍ଥାନାଙ୍କ (y-coordinate) ବା କୋଟି (ordinate)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ (ପ୍ରଥମେ x ଓ ପରେ y) ଆବଦ୍ଧ ହେଉଥିବାରୁ ଏହାକୁ ଏକ **କ୍ରମିତ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ି (ordered pair)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କର ପ୍ରଥମ ସଂଖ୍ୟାଟି x- ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଖ୍ୟାଟି y- ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ବୁଝାଏ । ସର୍ବପ୍ରଥମେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଥିବା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ଜନକ ଡେକାର୍ଟେଙ୍କ ନାନାନୁସାରେ P ବିନ୍ଦୁର ଏହି ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ **କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Cartesian co-ordinates)** କୁହାଯାଏ । ବସ୍ତୁଟି ଯେଉଁ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେ ସମତଳକୁ **କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ (Cartesian plane)** କୁହାଯାଏ ।

ସମତଳଟି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁପାଇଁ ଏକ କ୍ରମିତ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ି ରହିଛି । ତେଣୁ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ସମତଳକୁ ଲେଖିପାରିବା :

ସମତଳ = $\{(x, y) \mid x, y \in R\}$

ତୁମେ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ପୁସ୍ତକରେ ପଢ଼ିଛ, $(x, y) \in R \times R$ ବା $(x, y) \in R^2$

ତେଣୁ ଏହି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳକୁ **R^2- ସମତଳ (R^2-plane) ବା କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ (Cartesian Plane)** ମଧ୍ଯ କୁହାଯାଏ ।

$A \times B$ ର ସଂଜ୍ଞା $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ ହେଲେ $A \times B = \{(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,3),(3,4)\}$ ।

ସେହିପରି $B \times A = \{(b,a) \mid a \in A, b \in B\}$ ଏବଂ $B \times A = (3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)$

ଯଦି $A = B = R$ (ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ) ତେବେ କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ ସେଟ୍

$R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ ଓ ଏହାକୁ R^2 ରୂପେ ମଧ୍ଯ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ବିସ୍ତୃତ ଆଲୋଚନା କରିବା । $\overleftrightarrow{X'OX}$ ଅକ୍ଷର $\overrightarrow{OX}$ କୁ x- ଅକ୍ଷର ଧନଦିଗ, $\overrightarrow{OX'}$ କୁ ଋଣଦିଗ କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି $\overrightarrow{OY}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OY'}$ କୁ $\overleftrightarrow{Y'OY}$ ଅକ୍ଷର ଯଥାକ୍ରମେ ଧନଦିଗ ଓ ଋଣଦିଗ ଭାବେ ନିଆଯାଇଥାଏ ।

ପ୍ରଥମେ x- ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ M (ଚିତ୍ର 6.1) ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଉ । ଏହାର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ x ଏବଂ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ । କାରଣ x- ଅକ୍ଷଠାରୁ $\overrightarrow{OY}$ ବା $\overrightarrow{OY'}$ ଦିଗରେ M ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ଶୂନ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ।

(i) ତେଣୁ x- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, 0)$ ଅର୍ଥାତ୍ x- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ $= 0$ ।

(ii) ସେହିପରି y- ଅକ୍ଷର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(0, y)$ ଅର୍ଥାତ୍ y- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର x ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 ।

(iii) ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ଉଭୟ ଅକ୍ଷର ପରସ୍ପର ଛେଦବିନ୍ଦୁରେ ଥିବାରୁ ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(0, 0)$ ଅଟେ ।

(iv) (a) ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x > 0, y > 0$, ଅର୍ଥାତ୍ x ଓ y ଉଭୟେ ଧନାତ୍ମକ ।

(b) ଦ୍ୱିତୀୟପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x < 0, y > 0$; ଅର୍ଥାତ୍ x ଋଣାତ୍ମକ ଓ y ଧନାତ୍ମକ ।

(c) ତୃତୀୟପାଦର ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x < 0, y < 0$; ଅର୍ଥାତ୍ x ଓ y ଉଭୟେ ଋଣାତ୍ମକ ।

(d) ଚତୁର୍ଥପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x > 0, y < 0$, ଅର୍ଥାତ୍ x ଧନାତ୍ମକ ଓ y ଋଣାତ୍ମକ ।

(v) ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ପାଦରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହଁନ୍ତି ।

(vi) x- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 ହେତୁ x- ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y = 0$ । ସେହିପରି y- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 ହେତୁ y- ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x = 0$ ।

6.3 ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା (Distance between two given points) :

ଉପପାଦ୍ୟ - 1:

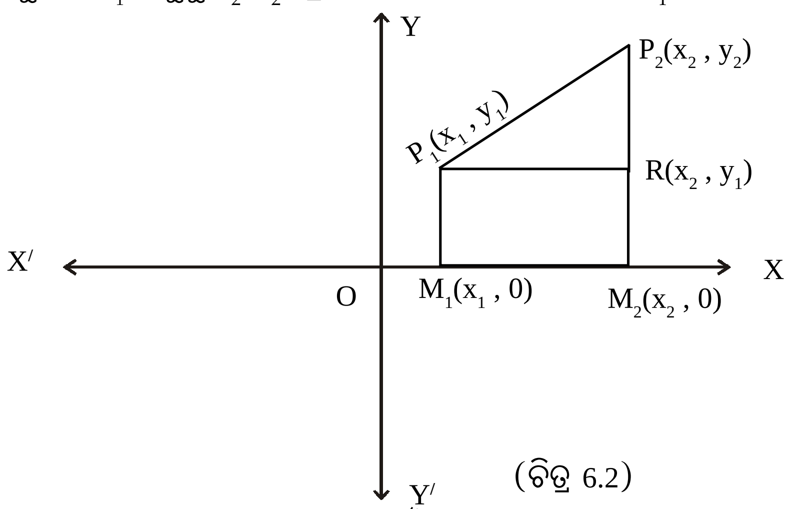
ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ $P_1(x_1, y_1)$ ଓ $P_2(x_2, y_2)$ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଦୂରତା

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ଦତ୍ତ : ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ $P_1(x_1, y_1)$ ଏବଂ $P_2(x_2, y_2)$ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ଅଙ୍କନ : ଏକ ସମତଳରେ P_1 ଓ P_2 ଦୁଇଟି ବୁନ୍ଦୁ (ଚିତ୍ର 6.2) । ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) । $\overline{P_1P_2}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର । P_1 ଓ P_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ x-ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{P_1M_1}$ ଓ $\overline{P_2M_2}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ପୁନଶ୍ଚ, P_1 ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{P_2M_2}$ ପ୍ରତି x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overline{P_1R}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 6.2)

ପ୍ରମାଣ : $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$, $M_1P_1 = y_1$ ଓ $M_2P_2 = y_2$

ତେଣୁ $P_1R = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$

ଏବଂ $RP_2 = M_2P_2 - M_2R = M_2P_2 - M_1P_1 = y_2 - y_1$

ଯେହେତୁ P_1RP_2 Δ ରେ $m\angle P_1RP_2 = 90^0$, ତେଣୁ ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ଯେହେତୁ ଦୂରତା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା,

ତେଣୁ $P_1P_2 = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ଅଥବା $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\boxed{\text{ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା} = \sqrt{\text{x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ବର୍ଗ} + \text{y - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ବର୍ଗ}}}$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ମୂଳବିନ୍ଦୁ O (0,0) ରୁ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P(x, y) ର ଦୂରତା OP = $\sqrt{x^2 + y^2}$ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : P_1, P_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $P_1P_2 = |x_2 - x_1|$ ଓ y-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $P_1P_2 = |y_2 - y_1|$ ହେବ ।

ନିମ୍ନରେ ସମାହିତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଦୂରତା ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ -1 : P(0, –5) ଓ Q(4, –6) ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 0, y_1 = -5, x_2 = 4, y_2 = -6$

ଅତଏବ PQ = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (-5-(-6))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-5+6)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 2 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, A(0,6), B(2,3) ଓ C(4,0) ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ।

ସମାଧାନ : AB = $\sqrt{(0-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

BC = $\sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ଏବଂ

AC = $\sqrt{(0-4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : AB + BC = $\sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$ = AC

ସୁତରାଂ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକ ରେଖୀୟ ଏବଂ A-B-C (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ -3 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ A(–2,3), B (5, –2), C(3,–4) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ Δ ର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ।

ସମାଧାନ : A(–2,3), B (5, –2), C(3,–4) ତିନିଗୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । ଦୂରତା ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ

AB = $\sqrt{(-2-5)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

CB = $\sqrt{(3-5)^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

AC = $\sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : AB = AC = $\sqrt{74}$, $\Rightarrow \Delta$ ABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 : y -ଅକ୍ଷ ଉପରେ A (6, 5) ଓ B (-4, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁଟି ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର y -ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,y) । ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ AP=BP ।

AP = $\sqrt{(0-6)^2 + (y-5)^2}$ ଏବଂ BP = $\sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{(0-6)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(-4-0)^2+(3-y)^2}$ ($\because$ AP = BP)

$\Rightarrow \sqrt{36+(y-5)^2} = \sqrt{16+(3-y)^2} \Rightarrow 36 + y^2 - 10y + 25 = 16 + 9 - 6y + y^2$

$\Rightarrow 10y - 6y = 36 + 25 - 16 - 9 \Rightarrow 4y = 36 \quad \Rightarrow y = 9$

ତେଣୁ A(6,5) ଓ B (–4, 3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ y -ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁଟି P(0,9) ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, A(1,0), B(5,3) ଓ C(4, –4) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ A(1,0), B(5,3) ଓ C(4, –4)

ଅତଏବ $AB = \sqrt{(1-5)^2+(0-3)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(5-4)^2+(3-(-4))^2} = \sqrt{(1)^2+(7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$CA = \sqrt{(4-1)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ AB = CA ଏବଂ ଯେହେତୁ $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50 = BC^2$,

$\therefore \Delta$ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ । (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଉଦାହରଣ - 6 : A(3,5) ଓ B(–2,4) ଦୁଇଗୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ y -ଅକ୍ଷକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : C ବିନ୍ଦୁଟି y -ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ହେତୁ ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମନେକର (0,y) । ଯେହେତୁ C ବିନ୍ଦୁଟି $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ; ଏହା ଉଭୟ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ । ଅର୍ଥାତ୍ AC = BC

$AC = \sqrt{(3-0)^2+(5-y)^2}$ ଏବଂ $BC = \sqrt{(-2-0)^2+(4-y)^2}$

$\because AC = BC \Rightarrow \sqrt{(3-0)^2+(5-y)^2} = \sqrt{(-2-0)^2+(4-y)^2} \Rightarrow 3^2+(5-y)^2 = (-2)^2 + (4-y)^2$

$\Rightarrow 9 + 25 - 10y + y^2 = 4 + 16 - 8y + y^2 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$

$\therefore$ C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,7) (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 7 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P(2–2), Q(8,4), R(5,7) ଓ S(–1,1) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ସମାଧାନ : $PQ = \sqrt{(8-2)^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$;

$QR = \sqrt{(5-8)^2+(7-4)^2} = \sqrt{(-3)^2+(3)^2} = 3\sqrt{2}$;

$RS = \sqrt{(-1-5)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$ ଏବଂ

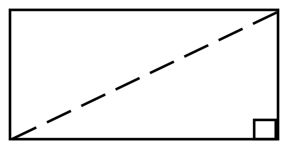
. $SP = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

ଅର୍ଥାତ୍ $PQ = RS$ ଓ $QR = SP$

ପୁନଶ୍ଚ $PR^2 = (5-2)^2 + \{7-(-2)\}^2 = 3^2 + 9^2 = 90$

ଏବଂ $PQ^2 + QR^2 = (6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 90 = PR^2 \Rightarrow m\angle PQR = 90^0$

$\therefore$ PQRS ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 6.3)

ବି.ଦ୍ର. : PQRS ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ହେବା ପାଇଁ PR = QS ର ପ୍ରମାଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (0, 0) ଓ (4, 3) (ii) (0, 2) ଓ (-6, 2)

(iii) (-3, 0) ଓ (5, 6) (iv) (2, 4) ଓ (1, 3)

(v) (-2, -2) ଓ (-3, -5) (vi) (a, -b) ଓ (-a, b)

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ଥିର କର ।

(i) (0, 1) ଓ (-1, 0) (ii) (2, 3) ଓ $(4, \frac{3}{2})$

(iii) $(\sqrt{7}, \sqrt{19})$ ଓ $(-\sqrt{7}, -\sqrt{19})$ (iv) (4, –2) ଓ (2, 4) (v) (0, 4) ଓ (2, 2)

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ABC ତ୍ରିଭୁଜମାନ ସମକୋଣୀ । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କେଉଁ କୋଣଟି ସମକୋଣ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) A (3, 3), B(9, 0) ଓ C(12, 21) (ii) A(1, 1) B(3, 4) ଓ C(0, 6)

(iii) A(–1, –2), B(5, –2) ଓ C(5, 6) (iv) A(12, 8), B(–2, 6) ଓ C(6, 0)

(v) A(1, 6), B(5, –1) ଓ C(7, 2)

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ABC ତ୍ରିଭୁଜମାନ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

(i) A (8, 2), B(5, –3) ଓ C(0, 0) (ii) A(0, 6) B(–5, 3) ଓ C(3, 1)

(iii) A (8, 9), B(–6, 1) ଓ C(0, –5) (iv) A(7, 1) B(11, 4) ଓ C(4, –3)

(v) A (0, 0), B(4, 0) ଓ C(0, – 4) (vi) A(2, 2) B(–2, 4) ଓ C(2, 6)

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସୂଚିତ ଚିତ୍ରକୁ ଗଠନ କରବ ।

(i) (1, 1), (–1, –1), $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(ii) (3, –3), (–3, 3), $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(iii) (1, 2), (3, 4) ଓ (5, 8) (ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(iv) (1, 2), (2, 4) ଓ (3, 5) (ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(v) (–2, 3), (8, 3) ଓ (6,7) (ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ)

(vi) (–6, –8), (–16, 12) ଓ (–26, –18) (ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସୂଚିତ ଚିତ୍ରକୁ ଗଠନ କରିବ ।

(i) (–8, 3), (–2, –1), (6, –2) ଓ (0, 2) (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର)

(ii) (–2, –1), (1, 0), (4, 3) ଓ (1, 2) (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର)

(iii) (0, –1), (2, 1), (0, 3) ଓ (–2, 1) (ବର୍ଗ ଚିତ୍ର)

(iv) (0, 5), (–1, 2), (–4, 3) ଓ (–3, 6) (ବର୍ଗ ଚିତ୍ର)

(v) (–2, 3), (–4, –1), (–6, 0) ଓ (–4, 4) (ଆୟତ ଚିତ୍ର)

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ P(1, 1) ବିନ୍ଦୁ A (0,2), B (2, 0) ଓ C (0, 0) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

8. x ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ C (x, 3) ବିନ୍ଦୁ, A (2, 4) ଓ B (3, 5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଠାରୁ ସମାନ ଦୂରରେ ରହିବ ?

9. P (2, y) ବିନ୍ଦୁ Q (–1, 2) ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ 5 ଏକକ ଦୂରରେ ରହିଲେ, y ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଦର୍ଶାଅ ଯେ A (1, 1), B (2, 2) ଓ (C (3, 3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ ।

11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ A (1, 4), B (–1, 6), C (2, 3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ।

12. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (1, 0), (2, –3) ଏବଂ (–1, 6) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ଓ (1, 0) ବିନ୍ଦୁଟି ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅଟେ ।

13. x ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ଯାହା (5, 4) ଓ (–2, 3) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ।

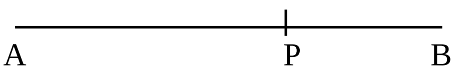
14. ଯଦି O (0, 0), A (1, 2), B (3, 8) ଏବଂ C (3, –1) ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = 2CO ।

15. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 3) ବିନ୍ଦୁ (4, 3) ହେଲେ, ତୃତୀୟ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

6.4 ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର (Division Fermula) :

ସଂଜ୍ଞା : ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ :

ଯଦି A – P – B ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ P ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AP}$ ଓ $\overline{PB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ ହୁଏ ।



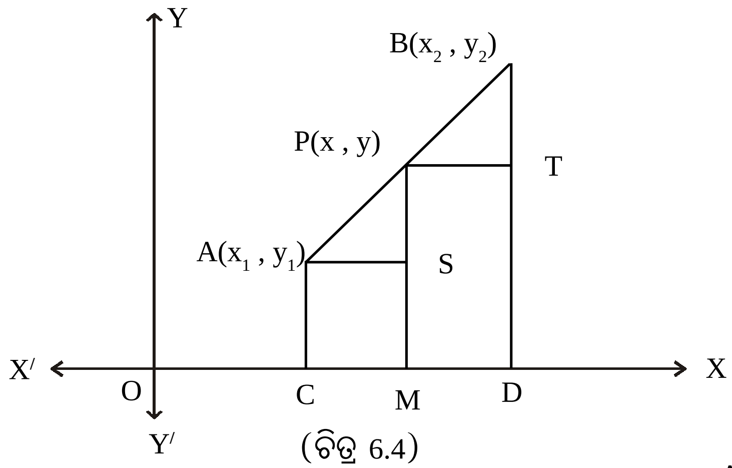
ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ AP + PB = AB ହୁଏ ଓ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ ହୋଇଥିବା ଦୁଇ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ AP : PB ।

ଯଦି P ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ m : n ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରେ, ଆମେ ଲେଖିବା ଯେ, $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ ।

କିନ୍ତୁ P ବିନ୍ଦୁ $\overline{BA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ r : s ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କଲେ, ଆମେ ଲେଖିବା ଯେ, $\frac{PB}{PA} = \frac{r}{s}$ ।

ଉପପାଦ୍ୟ – 2 :

$A(x_1, y_1)$ ଓ $B(x_2, y_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$, ଯଦି $P(x, y)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା m : n ଅନୁପାତରେ ଅର୍ନ୍ତବିଭାଜିତ ହୁଏ, ତେବେ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 6.4)

ଦତ୍ତ : ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉପରିସ୍ଥ P ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$ ।

ମନେକର A, B ଓ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ଏବଂ (x, y) ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

ଅଙ୍କନ : A, P ଓ B ରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AC}$, $\overline{PM}$ ଏବଂ $\overline{BD}$ ଲମ୍ବ ଏବଂ $\overline{AS} \perp \overline{PM}$, $\overline{PT} \perp \overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ASP ଏବଂ Δ PTB ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ

$$m\angle PSA = m\angle BTP = 90^0$$

$m\angle PAS = m\angle BPT$ (ଅନୁରୂପ)

$\therefore \Delta$ ASP ଓ Δ PTB ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ, ଅର୍ଥାତ୍ $\Delta ASP \sim \Delta PTB$ ।

ତେଣୁ $\frac{AS}{PT} = \frac{PS}{BT} = \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AS}{PT} = \frac{m}{n}$ ଏବଂ $\frac{PS}{BT} = \frac{m}{n}$

ମାତ୍ର $AS = CM = x - x_1$, $PT = MD = x_2 - x$ ଏବଂ $PS = PM - SM = PM - AC = y - y_1$

$BT = BD - TD = TD - PM = y_2 - y$

$\dfrac{AS}{PT} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{m}{n} \quad \Rightarrow mx_2 - mx = nx - nx_1 \Rightarrow mx_2 + nx_1 = mx + nx$

$$\Rightarrow x(m + n) = mx_2 + nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

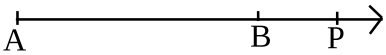
ସେହିପରି, $\dfrac{PS}{BT} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow my_2 - my = ny - ny_1 \Rightarrow my_2 + ny_1 = my + ny$

$$\Rightarrow y(m + n) = my_2 + ny_1 \Rightarrow y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

ତେଣୁ A (x_1, y_1) ଓ B (x_2, y_2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗକାରୀ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ କୁ m : n ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, y) = \left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ଅଟେ ।

ସୂଚନା : A, B ଓ P ବିନ୍ଦୁ ଯେକୌଣସି ପାଦ (quadrant) ରେ ରହିଲେ ମଧ୍ୟ . ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ । (ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କ୍ଷେତ୍ରରେ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (i) ଯଦି A–B–P ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ $\overline{AB}$, P ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BP}$ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ବହିର୍ବିଭକ୍ତ ହୋଇଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।



(ii) ଏଠାରେ ବହିର୍ବିଭାଜନର ଅନୁପାତ AP : BP ହେବ ଓ AP–PB = AB ହେବ ।

(iii) $\dfrac{AP}{BP} < 1$ ହେଲେ P –A–B ଏବଂ $\dfrac{AP}{BP} > 1$ ହେଲେ A – B – P ହେବ ।

(iv) $A(x_1, y_1)$ ଓ $B(x_2, y_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$, ଯଦି P(x,y) ଦ୍ୱାରା m:n ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜିତ ହୁଏ ତେବେ P(x, y) ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 1: ଯଦି P ବିନ୍ଦୁଟି $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ m = n ହୁଏ ଏବଂ

ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ– 8 : (1,–2) ଓ (–3,–4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A(1, –2) ଓ B(–3, –4) ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଓ P(x, y), $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ଏଠାରେ $x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = -3, y_2 = -4$

ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$ ଓ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

$\therefore$ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲା P(1, -3) ।

ଉଦାହରଣ - 9 : ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (3,5) ଓ ଏହାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (2,1) ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟି ହେଲା $P(x_2, y_2)$ ।

ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ $(x_1, y_1) = (3, 5)$ ଏବଂ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ $(x, y) = (2, 1)$

ସୂତ୍ରାନୁସାରେ, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ବା $x_2 = 2x - x_1 = 2 \times 2 - 3 = 1$

ଏବଂ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ବା $y_2 = 2y - y_1 = 2 \times 1 - 5 = -3$

$\therefore$ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟି ହେଲା : $(1, -3)$ ।

ଉଦାହରଣ - 10 : A(2, 3) ଓ B(5, -3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1:2 ଅନୁପାତରେ ଅର୍ନ୍ତବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 5, y_2 = -3; m = 1, n = 2$

ସୁତରାଂ, (i). ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି P(x, y) ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରେ

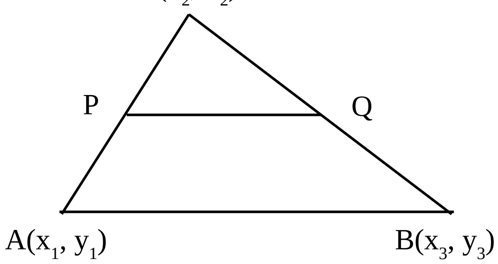
x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{1x5 + 2x2}{1+2} = 3$ ଏବଂ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{1x(-3) + 2x3}{1+2} = 1$

ତେଣୁ $\overline{AB}$ କୁ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା . ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଲା : (3, 1) ।

ଉଦାହରଣ - 11 : ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ABC ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ଯଥାକ୍ରମେ A, B, C ଓ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ଓ (x_3, y_3) ।

P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 6.5)

$\therefore$ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନଙ୍କ = $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ଏବଂ

Q ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

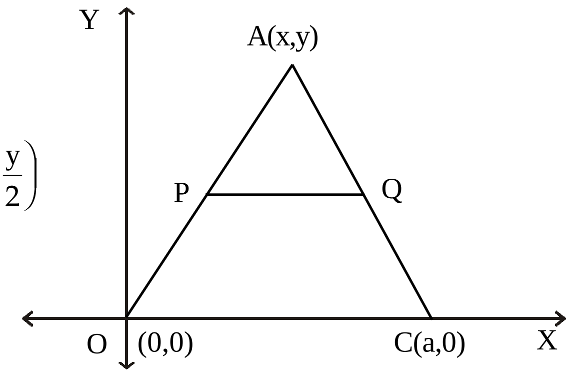
AC = $\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

ଏବଂ $PQ = \sqrt{\left\{\frac{(x_2 + x_3)}{2} - \frac{(x_1 + x_2)}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{(y_2 + y_3)}{2} - \frac{(y_1 + y_2)}{2}\right\}^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(y_3 - y_1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \frac{1}{2}AC$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରମାଣ :

ΔOAC ର $O(0,0)$, $C(a,0)$ ଏବଂ $A(x,y)$



(ଚିତ୍ର 6.6)

P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ $P\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$ ଓ $Q\left(\frac{x+a}{2},\frac{y}{2}\right)$

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{x}{2}-\frac{x+a}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}OC \quad \therefore PQ = \frac{1}{2}OC$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(b)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଯଦି (1, –2) ବିନ୍ଦୁଟି (4, 2) ଓ (K, –6) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହୁଏ, ତେବେ k = ------ ।

[–2, 2, –4, 4]

(ii) (–2, 3) ଓ (3, –2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି ------ । $\left[(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right]$

(iii) ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଯଦି ରେଖାଖଣ୍ଡଟିର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (2, 3) ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ----- । [(-2, 3), (2, -3), (-2, -3), $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$]

(iv) (0, 2) ଓ (2, 0) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ । 3 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ -- ।

$\left[\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)(-2,4)(4,-2)\right]$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (3, 4), (1, -2) (ii) (-1, 3), (4, 0) (iii) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ (iv) (0, -3), (-4, 0)

(v) (-1, -2), (3, -1) (vi) (a, b), (c, d) (vii) (-2, 1), (-3, -4) (viii) $(at_1^2, 2at), (at^2_2, 2at_2)$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଦୁଇବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି (–1, 2) । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ h ଓ k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (h, –1), (2, k) (ii) (5, 3), (h, k)

(iii) (1 + h, k), (k, –h – 1) (iv) (h – k, k – h), (2h, 2k)

4. (0, 0) ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ । ଯଦି ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (2, 3) ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଓ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (-2, 4) ଏବଂ (1, 2), ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଓ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (3, 5) ଏବଂ (2, 1) ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

7. x ଓ y ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (6, -2) ଓ (2, –4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଏବଂ (x, 1) ଓ (-2, y) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବେ ।

8. (2, 3) ଓ (1, 4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 3 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. (-2, 3) ଓ (5, -7) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 3 : 4 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଯଦି (5, 9) ବିନ୍ଦୁଟି, (7, -3) ଓ (4, k) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 2 : 1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରେ, ତେବେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।

ସୂଚନା : (i) ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ଭରକେନ୍ଦ୍ର (Centroid) କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଭରକେନ୍ଦ୍ର ମଧ୍ୟମାକୁ 2:1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରେ ।

12. (h,5), (–4,k) ଓ (8,9) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–2, 6) ହେଲେ h ଓ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. Δ ABC ର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1, 1) । A (3, -4), B (-4, 7) ହେଲେ, C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

14. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମାନ (-4, 1) ଓ (3, -4) ଏବଂ (1, 3) ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହାର ଭରକେନ୍ଦ୍ର ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

15. A ଓ B ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (1, 2) ଓ (5, -4) । $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥିର କର, ଯେପରି ବିନ୍ଦୁଟିର A ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଦୂରତା, B ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଦୂରତାର 3 ଗୁଣ ହେବ ।

16. (1,5) ଓ (7,2) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. O(0,0), A(2a, 0) ଓ B(0, 2b) ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ OAB ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କଠାରୁ ସମାନ ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

18. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

19. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ସୂଚନା : ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ A,B,C,D ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (0,0), (a,0), (a,b) ଓ (0,b) ନିଅ ।

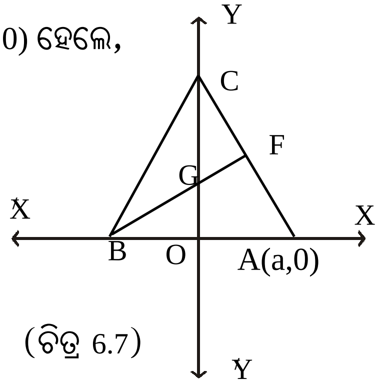
20. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । A ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (a, 0) ହେଲେ,

(i) ଅନ୍ୟ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $\overline{BE}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) G ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 6.7)

6.5 ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a triangle) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ।

ଏହି ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ ।

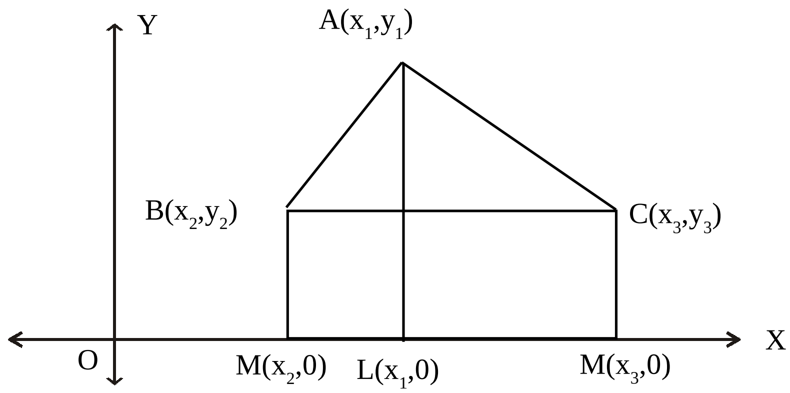
ଉପପାଦ୍ୟ - 3 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3) ହେଲେ,

ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$

(∵ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକ ଧନରାଶି, ତେଣୁ ଏଠାରେ ମଡ୍ୟୁଲସ୍ । । ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି ।)

ଦତ୍ତ : ସମତଳରେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ନିଆଯାଉ । ଏହାର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A,B,C ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3) ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$



(ଚିତ୍ର 6.8)

ଅଙ୍କନ : A,B ଓ C ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AL}, \overline{BM}$ ଓ $\overline{CN}$ ଲମ୍ବମାନ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ସ୍ଥାନାଙ୍କର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ $OL = x_1$, $OM = x_2$, $ON = x_3$ ଓ $AL = y_1$, $BM = y_2$, $CN = y_3$

ଚିତ୍ରରେ $ML = OL - OM = x_1 - x_2$ ଓ $MN = ON - OM = x_3 - x_2$

ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ରରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ABC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ALMB ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ALNC ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – BCNM ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{1}{2}ML(LA + MB) + \frac{1}{2}LN(LA + NC) - \frac{1}{2}MN(MB+NC)$$

($\because$ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ × ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି)

$$= \frac{1}{2}\,[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_3 - x_1)(y_1 + y_3) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[x_1(y_1 + y_2 - y_1 + y_3) - x_2(y_1 + y_2 - y_2 - y_3) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}\,\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,]$$

$$= \frac{1}{2}\,|\,\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\,| \quad \text{(ପ୍ରମାଣିତ)}$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1:

ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ, ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ ହେବ ଏବଂ ବିପରୀତ ପକ୍ଷେ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ ହେଲେ, ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ ।

ଏଣୁ ଯେକୌଣସି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3) ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବାର ଆବଶ୍ୟକ ଓ ଯଥେଷ୍ଟ ସର୍ତ୍ତ (necessary and sufficient condition) ଟି ହେଲା,

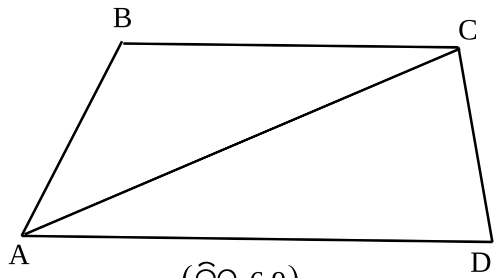
$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2:

ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହୁଏ ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1]$ ହେବ, ଯେତେବେଳେ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଏବଂ (0, 0) ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3:

ମନେକର ABCD ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର ଏକ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଆମେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ Δ ABC ଓ ACD ପାଇବା । ତେଣୁ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଉତ୍ପନ୍ନ ଦୁଇଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ।



(ଚିତ୍ର 6.9)

ସୂଚନା : ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟରେ 2 x 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ, ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏଠାର ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{1}{2}\,|\,\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\,|$ କୁ ଏକ 3 x 3 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ,

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$ ର ଧନାତ୍ମକ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ - 12: ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (1, 3)(–7, 6) ଓ (5, –1) ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫପଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $(x_1, y_1) = (1, 3)$, $(x_2, y_2) = (-7, 6)$, $(x_3, y_3) = (5, -1)$

ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{1}{2}\,|\,\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}|$

$= \frac{1}{2}\,|\,1\{6 - (-1)\} + (-7)(-1-3) + 5(3-6)|$

$= \frac{1}{2}\,|\,(7+28-15)| = 10$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13: ଦର୍ଶାଅ ଯେ, A(1, 2), B(0, 5), C(2, –1) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (0, 5)$, $(x_3, y_3) = (2, -1)$

ABC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{1}{2}\,|\,\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}|$

$= \frac{1}{2}\,|\,1\{5 - (-1)\} + 0(-1,-2) + 2(2-5)| = \frac{1}{2}\,|\,(6 + 0 - 6)| = 0$

ତେଣୁ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14.

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A (–2, 1), B (1, 0), C (2, 3) ଓ D (0, 4) ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଆମେ ΔABC ଓ + Δ ACD ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇବା ।

ତେଣୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ ACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

Δ ABC କ୍ଷେତ୍ରରେ $(x_1, y_1) = (-2, 1)$,

$(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (2, 3)$

Δ ACD କ୍ଷେତ୍ରରେ $(x_1, y_1) = (-2, 1)$,

$(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (0, 4)$

ତେଣୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2}\,|\,(-2)(0-3) + 1(3-1) + 2(1-0)| + \frac{1}{2}\,|\,(-2)(3-4) + 2(4-1) + 0(1-3)|$

$= \frac{1}{2}|6+2+2| + \frac{1}{2}|2+6+0|$

$= \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 8 = 5+4 = 9$ ବର୍ଗ ଏକକ (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}|$

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (c)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ (2,5), (–3,5) ଓ (0,5) ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ----- ହେବ । [–5, 3, 0, 10]

(ii) ଯଦି a = ------ ହୁଏ, ତେବେ (a, –2), (2, 5) ଓ (2, 10) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ । [0, 3, 2, –2]

(iii) y ର ମାନ ----- ପାଇଁ (–2, –2), (0, y) ଓ (3, 3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ । [0, 2, 2, 3]

(iv) k ର ମାନ ----- ପାଇଁ (k, –2), (1, 4) ଏବଂ (–2, 7) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେବେ । [3, –3, 2, –2]

(v) a ର ମାନ ----- ପାଇଁ (4, –5), (1, a) ଏବଂ (–2, 7) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ନାହିଁ ।

2. ନିମ୍ନରେ କେତେକ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦିଆଯାଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (3, 0), (4, 5) ଓ (2, 0) (ii) (0,0), (1, 0) ଓ (1, 1)

(iii) (–2, 1), (2, –3) ଓ (4, –4) (iv) (5, 7), (6, 4) ଓ (2, –5)

(v) (5, 2), (–1, 3) ଓ (1, –2)

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(i) (1, 1), (4, 3) ଓ (–2, –1) (ii) (–1, –5), (0, –3) ଓ (4, 5)

(iii) (1, 4), (3, -2) ଓ (-3, 16) (iv) (–4a, –6a), (–a, –2a) ଓ (5a, 6a)

(v) (–a, 2b), (0, b) ଓ $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

4. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1, –3), (2, –5) ଓ (x, 1) ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 4 ବର୍ଗ ଏକକ ହେଲେ, x ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

5. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (3, –5), (k, 0) ଓ (–4, 7) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{95}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ ହେବ ?

6. (2, 3), (0, 5) ଓ (1, y) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିଲେ, y ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

7. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (2, 3), (3, k) ଏବଂ (5, 9) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ?

8. କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ (1, 1), (3, 5) ଓ (x, y) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ, ସ୍ଥିର କର ।

9. ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1, 0), (2, 4) (0, 5) ଓ (–2, 1) ହେଲେ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–2, 3) (3, –2), (7, 4) ଓ (1, 5) ହେଲେ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. Δ ABC ରେ A ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1,1) ଓ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ D(–1,–2) ଓ E(3,2) ହେଲେ B ଓ C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

12. (3, 0), (5, –1) ଓ (p, p) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. (p, 2p), (3p, 3p), ଓ (3, 1) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

14. (x, –1), (2, –1), (2, 1) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେଲେ x ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

15. (x, y) ବିନ୍ଦୁଟି (a, 0) ଓ (0, b) ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଗୋଟିର ସଂଯୋଗକାରୀ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ।

16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,(a, b), (a′, b′) ଓ (a – a′, b – b′) ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକରେଖୀୟ ନୁହଁନ୍ତି ।

17. A(p+1, 1), B(2p+1, 3) ଓ (2p + 2, 2p) ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକ ରେଖୀୟ ହେଲେ p ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

18. (x, y), (3,4) ଓ (–5, – 6) ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକ ରେଖୀୟ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ 5x – 4y +1 =0